Colle n° 10

Séries de fonctions

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas normale sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$.
4. Soit un entier naturel $p > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.
5. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? sur $]0, +\infty[$?
   ▷ **Trois méthodes dans le corrigé**.

Exercice 2. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x > -1$, $f_k(x) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}$.

1. Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ est défini pour tout réel $x > -1$.
   Et que la fonction S est monotone sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.
2. Soit $a > -1$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $]-1, a]$.
   Et que la fonction S est continue sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$:
   $$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}.$$
   Et déterminer un équivalent de $S(x)$ quand le réel x tend vers -1^+.
4. Déterminer un équivalent de $S(n)$ quand l'entier n tend vers ∞.
5. Montrer que la fonction S possède une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.
6. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.