FEUILLE DE T.D. N° 8

Produits scalaires

Exercice 1. 1. Soient x, y et z trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot(x+y+z)\geq 9.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

2. Soit f une fonction continue et strictement positive sur un segment $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\times\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{f(t)}\geqslant(b-a)^2$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

Exercice 2 (Quotient de Rayleigh)**.**

Soient $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définis par

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\quad\text{et}\quad A=\begin{pmatrix}2&-1&0&&\\-1&2&-1&&\Large 0\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\\Large 0&&-1&2&-1\\&&0&-1&2\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que

$${}^tXAX=2\sum_{k=1}^n x_k^2-2\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}.$$

2. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}x_kx_{k+1}\right|\leq\sum_{k=1}^n x_k^2.$$

3. Que vaut $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ si X est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda\in\mathbb{R}$?
4. En déduire que $\mathrm{Sp}(A)\subset[0,4]$.

Exercice 3. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A\,{}^tB)$.

1. On note $\mathcal{A}_n$ le *sev* des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n$ le *sev* des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
   (a) $\mathcal{A}_n\perp\mathcal{S}_n$;
   (b) $\mathcal{A}_n^\perp=\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_n^\perp=\mathcal{A}_n$;
   (c) pour tout $(M,S)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|\frac{M-M^T}{2}\|\leq\|M-S\|$. Quelle est la distance $d(M,\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?
2. On considère le cas $n=2$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix},(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

   (a) Déterminer une base de $F^\perp$
   ▷ Le corrigé propose deux méthodes.
   (b) Déterminer la matrice A', image de $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F **▷ Le corrigé propose trois méthodes.**

Exercice 4. Montrer que la fonction f définie pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ par

$$f(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(t-a\sin t-b\cos t)^2dt$$

possède un minimum et calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}f(a,b)$.

Exercice 5. 1. Montrer que $< P\,|Q >= P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes.

2. Calculer $< X^p\,|X^q >$ pour chaque entier naturel p et chaque entier naturel q.
3. Soient F l'ensemble des polynômes constants et G l'ensemble des polynômes admettant 0 pour racine.
   Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.
4. Déterminer l'orthogonal de F et l'orthogonal de G.
5. Montrer que la distance d'un polynôme P au sous-espace vectoriel G vaut $|P(0)|$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. Tout polynôme $P = \sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n X^n$ sera aussi noté $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ où a_n est une suite nulle à partir d'un certain rang.

1. Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire qui, à tout polynôme $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, associe le réel $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$. Montrer que l'application f surjective.
2. Le produit scalaire de deux polynômes $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ est défini par $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout polynôme P de E,
$$|f(P)| \leq K \cdot \|P\|.$$
3. Soit F le noyau de f. Vérifier que le polynôme
$$R_{ij} = (j+1)X^j - (i+1)X^i$$
appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ pour tous entiers naturels i et j.
4. En déduire que $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Remarque — L'application f est une forme linéaire non nulle, le *sev* F est donc un hyperplan. La dernière question prouve ainsi que, en dimension infinie, l'orthogonal d'un hyperplan n'est pas toujours une droite. ▷ **proposition VIII.27 &** https://math-os.com/orthogonal-sev/

Exercice 7. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P(X)|Q(X)\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et on définit la forme linéaire $h : E \to \mathbb{R},\ P(X) \mapsto P(0)$. On suppose qu'un polynôme $A(X)$ est tel que $h(P(X)) = \langle A(X)|P(X)\rangle$ pour tout $P(X) \in E$. Calculer $\langle A(X)|X A(X)\rangle$ et conclure.

Exercice 8 (Projecteurs spectraux – tiré du sujet E3A Maths 1 PSI 2016)**.**

Soient un entier $n \geq 2$ et n réels $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ supposés distincts deux à deux. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est $\{a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n\}$.

1. Les matrices M^T et M ont-elles le même spectre ? Sont-elles diagonalisables ?
2. Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note V_i un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(a_i I_n - M)$ et W_i un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(a_i I_n - M^T)$. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
   (a) Montrer que, si $i \neq j$, alors $V_i^T\, W_j = 0$.
   (b) Qu'en déduire sur les sous-espaces propres de M et de M^T ?
3. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $V_i^T\, W_i \neq 0$. Que représente la matrice $\frac{1}{V_i^T\ W_i}\ V_i\, W_i^T$?