D.M. n° 6 de mathématiques

extrait du DS 5 « étoile » 2023-2024

Partie A - les polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par

$$T_0 = 1 \quad , \quad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le degré du polynôme T_n est n et le coefficient du terme dominant de T_n est 2^{n-1}.
2. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
3. Soit $n \geq 2$. On pose, pour chaque entier naturel k,
$$a_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$
Montrer que les réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux. Déterminer les racines du polynôme T_n.

Partie B - vecteurs propres

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par

$$\varphi(P) = XP' - (1 - X^2)P''$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \mathrm{Arccos}(x))$.
6. En déduire que, pour tout $x \in]-1, +1[$,
$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \qquad (\mathcal{E}_n)$$
7. Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. En déduire que T_n est un vecteur propre de φ.
9. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

Partie C - un produit scalaire

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ est convergente.
11. En déduire, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, la convergence de l'intégrale $\langle P \mid Q \rangle$.
12. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
13. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

    Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\, d\theta$ et en déduire $\|T_n\|$.
14. Montrer que, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\, dx$. En déduire que $\langle \varphi(P) \mid Q \rangle = \langle \varphi(Q) \mid P \rangle$ pour tous polynômes P et Q.
15. Montrer que $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie D - une méthode de quadrature

Soit $n \geq 2$. On cherche $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P(a_k) \qquad (*)$$

où les réels a_k ont été définis à la question 3.

16. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note b_k le réel $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ qu'on ne cherchera pas à calculer.

    Montrer qu'une $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifie la propriété $(*)$ si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-2}^2 & a_{n-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

17. Rappeler le déterminant de la matrice carrée apparue dans la question précédente. En déduire qu'il existe une unique $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifiant la propriété $(*)$.
18. En effectuant une division euclidienne par le polynôme T_n, montrer que la propriété $(*)$ est vraie pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Partie E - une autre expression des polynômes de Tchebychev

19. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta).$$

20. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \geq 1$,

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$