CORRIGÉ DE LA COLLE N° 09

Suites de fonctions & probabilités

2 DÉCEMBRE 2024

Exercice 1.

1. (a) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale impropre $u_n = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\,dx$ est convergente.
   (b) Etudier la limite de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que l'intégrale impropre $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,dx$ est convergente.
   (b) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$: $nu_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}\,dt$.
   (c) En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{n}$.
3. (a) Etudier la limite de la suite $v_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^n}\,dx$.
   (b) Soit, plus généralement, une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite, quand n tend vers l'infini, de $\int_0^1 f(x^n)\,dx$.

---

1. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x^n}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \le f_n(x) \le \mathrm{e}^{-x}$. Or $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Donc l'intégrale u_n est une intégrale convergente.
   (b) On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [1, +\infty[,\ |f_n(x)| \le \mathrm{e}^{-x}$ (indépendant de n) et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Or $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 1/\mathrm{e} \text{ si } x = 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$. La fonction f est continue et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
   SECONDE MÉTHODE (en ouvrant l'intervalle en 1) : $\forall x \in]1, +\infty[,\ |f_n(x)| \le \mathrm{e}^{-x}$ (indépendant de n) et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Or $\forall x > 1,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = 0$. La fonction f est continue par morceaux et $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
2. (a) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \le \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \le \mathrm{e}^{-x}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ est convergente. Donc l'intégrale A aussi.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On fait le CDV $t = x^n$ ($dt = nx^{n-1}dx$). La fonction $x \mapsto x^n$ est strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$, d'où : $nu_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}\,dt$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [1, +\infty[$, on pose $g_n(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1-\frac{1}{n}}}$.
   (c) On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall t \in [1, +\infty[,\ |g_n(t)| \le \mathrm{e}^{-t}$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente. Or $g_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ car $t^{1-\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{(1-\frac{1}{n})\ln t} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\ln t} = t$ par continuité de la fonction exp. D'où $nu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 g(t)\,dt$. D'où $\frac{u_n}{A/n} = \frac{nu_n}{A} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{A}{n}$.
3. (a) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x^n}$. On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \le 1$ (fonction indépendante de n) et $\int_0^1 1\,dx$ est convergente. Or $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} 1/\mathrm{e} \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } 0 \le x < 1 \end{cases}$.
   La fonction f est continue par morceaux et $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.
   SECONDE MÉTHODE (en ouvrant l'intervalle en 1) : Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on pose $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x^n}$. On utilise le théorème de la convergence dominée : $\forall x \in [0,1[,\ |f_n(x)| \le 1$ (fonction indépendante de n) et $\int_0^1 1\,dx$ est convergente. Or $\forall x \in [0,1[,\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = 1$. La fonction f est continue et $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$.

(b) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $g_n(x) = f(x^n)$. La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0,1]$, elle est donc bornée. Soit M un majorant de $|f|$: $\forall x \in [0,1],\ |g_n(x)| \leq M$ (indépendant de n) et $\int_0^1 M\,dx$ est convergente. Or $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x) = \begin{cases} f(1) \text{ si } x = 1 \\ f(0) \text{ si } 0 \leq x < 1 (*) \end{cases}$. La fonction g est continue par morceaux et $\int_0^1 g(x)\,dx = f(0)$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,dx = f(0)$ d'après le théorème de la convergence dominée

$(*)$ En effet, si $x \in [0,1[$, alors : $n \to \infty \implies x^n \to 0 \implies f(x^n) \to f(0)$ car f est continue par hypothèse.

Exercice 2. Soit une suite de fonctions $f_n\ :]0,1[\to \mathbb{R}$ convergeant simplement sur $]0,1[$ vers une fonction f. Montrer que :

1. si chaque fonction f_n est croissante, alors la limite f l'est aussi ;
2. même si chaque fonction f_n est bornée, la limite f ne l'est pas nécessairement ;
3. si chaque fonction f_n est bornée et si la convergence est uniforme sur $]0,1[$, alors la limite f est aussi bornée ;

On note $a = 0$ et $b = 1$.

1. Soient deux réels x_1 et x_2 de $]a,b[$ tels que $x_1 \leq x_2$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est croissante, d'où les réels $u_n = f_n(x_1)$ et $v_n = f_n(x_2)$ sont tels que $u_n \leq v_n$. Or $\lim u_n = f(x_1)$ et $\lim v_n = f(x_2)$ car f_n converge simplement vers f. Les inégalités larges passent à la limite, d'où $\lim u_n \leq \lim v_n$. D'où $f(x_1) \leq f(x_2)$. Donc la fonction f est croissante.
2. La fonction $f\ :]a,b[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{(x-a)(b-x)}$ n'est pas bornée. Mais c'est la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des fonctions $f_n\ :]a,b[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } a + \frac{1}{n} \leq x \leq b - \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ qui sont bornées.

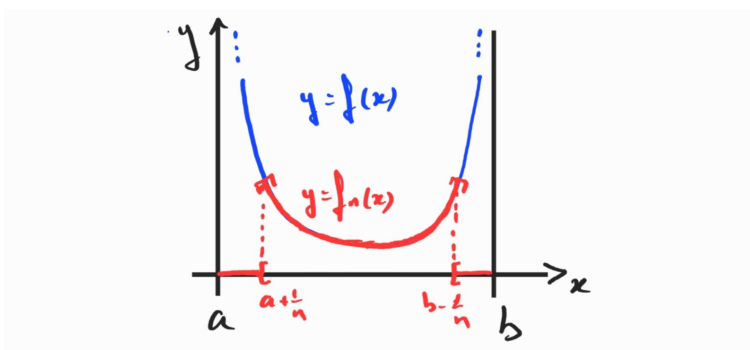

FIGURE 1 – UNE SUITE DE FONCTIONS BORNÉES QUI CONVERGE SIMPLEMENT VERS UNE FONCTION NON BORNÉE.

3. La convergence est uniforme, d'où $\sup\limits_{x\in]a,b[} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sup\limits_{x\in]a,b[} |f_N(x) - f(x)| \leq 1$. Or, pour tout $x \in]a,b[$, $f(x) = f(x) - f_N(x) + f_N(x)$, d'où $|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + M$, où M est un majorant de la fonction $|f_N|$ (un tel majorant existe car la fonction f_N est bornée). Donc la fonction f est bornée.

Exercice 3. Soit $K \in \mathbb{N}^*$. On se donne K boîtes numérotées de 1 à K. La boîte numérotée k contient k boules blanches et $K - k$ boules noires. On choisit une boîte au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans la boîte choisie, on tire indéfiniment une boule au hasard avec remise.

On note :

— pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_n : « la n-ième boule tirée est blanche » ;

— pour chaque $k \in [\![1,K]\!]$, l'événement C_k : « La boîte choisie est la k-ième ».

1. Montrer que la probabilité $u_{K,n}$ de l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_n$ vaut : $u_{K,n} = \dfrac{1}{K} \displaystyle\sum_{k=1}^{K} \frac{k^n}{K^n}$.

2. Déterminer $\lim_{K\to\infty} u_{K,n}$.
3. (a) Déterminer $\lim_{n\to\infty} u_{K,n}$.

   (b) Cette limite est la probabilité d'un événement : lequel et pourquoi ?

   ▷ théorème de la continuité décroissante

---

1. Première méthode : en reconnaissant une somme de Riemann. La fonction $f\ :\ t\mapsto t^n$ est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[0,1]$, d'où $\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} f\left(k\cdot\frac{1}{K}\right) \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,dt$. Donc $u_{K,n} \underset{K\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n+1}$.

   Seconde méthode : en comparant série et intégrale .La fonction $t\mapsto t^n$ est croissante. D'où, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a :
$$\int_{k-1}^{k} t^n dt \leq k^n \leq \int_k^{k+1} t^n dt$$
   Donc, en sommant :
$$\frac{K^{n+1}}{n+1} = \int_0^K t^n dt \leq \sum_{k=1}^{K} k^n \leq \int_1^{K+1} t^n dt = \frac{(K+1)^{n+1}}{n+1} - 1$$
   Or $\frac{(K+1)^{n+1}}{n+1} - 1$ est équivalent à $\frac{K^{n+1}}{n+1}$ quand K tend vers ∞.

   D'où
$$\sum_{k=1}^{K} k^n \underset{K\to\infty}{\sim} \frac{K^{n+1}}{n+1}.$$
   Donc $u_{K,n} \underset{K\to\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$ tend vers $\frac{1}{n+1}$ quand K tend vers l'infini.
2. On utilise la formule des probabilités totales : $(C_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements, d'où
$$\begin{aligned} P(B_1\cap\ldots\cap B_n) &= \sum_{k=1}^{K} P(C_k)P(B_1\cap\ldots\cap B_n|C_k) \\ &= \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{K}\frac{k^n}{K^n} \end{aligned}$$
   où $P(B_1\cap\ldots\cap B_n|C_k) = \left(\frac{k}{K}\right)^n$ car les événements $B_1,\cdots,B_n$ sont indépendants **pour la probabilité conditionnelle** P_{C_k}.
3. Dans la somme $\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{K}\frac{k^n}{K^n}$, les $K-1$ premiers termes tendent vers zéro et le dernier vaut $\frac{1}{K}$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_{K,n} = \frac{1}{K}$.

   D'après le théorème de la continuité décroissante, $\lim_{n\to\infty} P\left(\cap_{i=1}^{n} B_i\right) = P\left(\cap_{i\in\mathbb{N}^*} B_i\right)$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_{K,n}$ est la probabilité de l'événement $\cap_{i\in\mathbb{N}^*} B_i$: « tirer indéfiniment des boules blanches ».