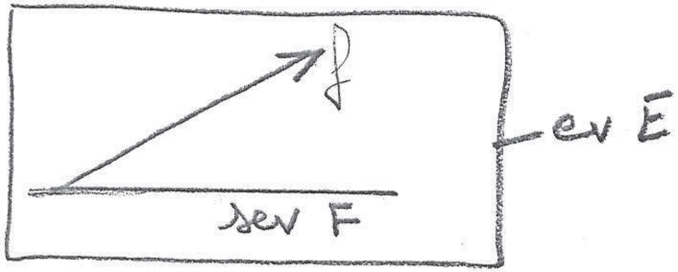
Exercice 4



* Soient l'ev $E = C([-\pi, +\pi], \mathbb{R})$
et le produit scalaire
$$\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) g(t) \, dt.$$
Soient $f(t) = t$ et $g(t) = a \sin t + b \cos t$

Alors $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 dt = \|f - g\|^2$

Quand a et b varient, la fonction g
parcourt le sev $F = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$

** Le sev F est de dimension finie
($\dim F = 2$), d'où (théorème
des moindres carrés) :

$\exists !\, g \in F$, $\|f - g\|$ est minimal.

et g est le projeté orthogonal de
f sur le sev F : $g = p(f)$

base $(\sin, \cos) \xrightarrow{\text{SCHMIDT}}$ b.o.n. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$p(f) = \langle \varepsilon_1 | f \rangle \varepsilon_1 + \langle \varepsilon_2 | f \rangle \varepsilon_2$

*** Calculs (algo. de Schmidt) :

/.../ $\quad \varepsilon_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(t)$

$\varepsilon_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(t)$

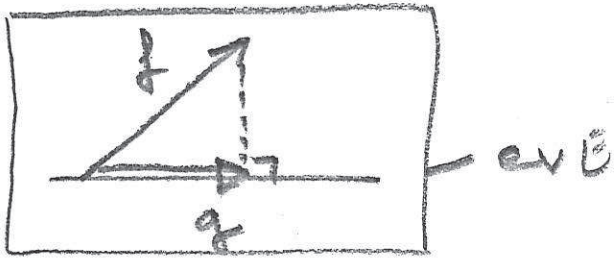
$$\langle \varepsilon_1 | f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} \cdot t \, dt = 2\sqrt{\pi}$$

$$\langle \varepsilon_2 | f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} \cdot t \, dt = 0$$

D'où : $\forall t \in [-\pi, +\pi]$,

$$g(t) = 2\sqrt{\pi}\, \varepsilon_1(t) + 0\, \varepsilon_2(t)$$
$$= 2 \sin(t)$$

****



D'après le théorème de Pythagore,

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \|g\|^2$$

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} t \cdot t \, dt = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\|g\|^2 = \|2\sqrt{\pi}\, \varepsilon_1\|^2 = 4\pi \|\varepsilon_1\|^2 = 4\pi$$

Donc

$$\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-\pi}^{+\pi} (t - a \sin t - b \cos t)^2 \, dt = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi$$