Corrigé de la feuille de T.D. nº 8

Produits scalaires

5 décembre 2024

Exercice 1. 1. Soient x, y et z trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot(x+y+z)\geq 9.$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

2. Soit f une fonction continue et strictement positive sur un segment $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} \geqslant (b-a)^2$$

Dans quels cas y a-t-il égalité ?

---

1. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$ avec les vecteurs $u=(\sqrt{x},\sqrt{y},\sqrt{y})$ et $v=\left(\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{\sqrt{y}},\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$ Ces vecteurs sont correctement définis car x, y et z sont strictement positifs.

$$\|u\|^2=x+y+z \quad , \quad \|v\|^2=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \quad \text{et} \quad <u,v>=3.$$

Or $|<u,v>|\leq\|u\|\cdot\|v\|$, d'où $<u,v>^2\leq\|u\|^2\cdot\|v\|^2$, donc

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot(x+y+z)\geq 9.$$

Il y a égalité si, et seulement si, les vecteurs u et v sont colinéaires :

$$\exists c\in\mathbb{R},\ u=cv \iff \exists c\in\mathbb{R},\ \begin{cases}\sqrt{x}=c/\sqrt{x}\\ \sqrt{y}=c/\sqrt{y}\\ \sqrt{z}=c/\sqrt{z}\end{cases} \iff \exists c\in\mathbb{R},\ \begin{cases}x=c\\ y=c\\ z=c\end{cases} \iff x=y=z.$$

2. Comme $f(t)>0$ pour tout $t\in[a,b]$, on peut poser $f_1(t)=\sqrt{f(t)}$ et $f_2(t)=\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ pour tout $t\in[a,b]$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$(f_1|f_2)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}dt\right)^2=(b-a)^2$$

est inférieur ou égal à

$$||f_1||^2\cdot||f_2||^2=\int_a^b f(t)dt\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt.$$

Il y a égalité si, et seulement si, f_1 et f_2 sont colinéaires :

$$\exists c\in\mathbb{R},\ f_1=cf_2 \iff \exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in[a,b],\ \sqrt{f(t)}=c\frac{1}{\sqrt{f(t)}} \iff \exists c\in\mathbb{R},\ \forall t\in[a,b],\ f(t)=c.$$

Donc : il y a égalité si, et seulement si, f est constante.

Exercice 2 (Quotient de Rayleigh)**.** Soient $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ définis par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \\ -1 & 2 & -1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que
$${}^tXAX = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$$
2. Montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
3. Que vaut $\frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ si X est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$?
4. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset [0, 4]$.

---

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: $\quad {}^tXAX = {}^tX \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n \\ -x_{n-1} + 2x_n \end{pmatrix} = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}$
2. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}$:
$\left|\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=2}^{n} x_k^2}$. En outre, $\quad \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $\sum_{k=2}^{n} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Donc $\quad \left|\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
3. Soit X un vecteur propre de la matrice A pour une valeur propre λ :
$$\frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \frac{{}^tX(\lambda X)}{{}^tXX} = \lambda.$$
On peut diviser par ${}^tXX$ car un vecteur propre X ne peut être nul.
4. Si λ est une valeur propre de A, alors il existe un vecteur propre X associé à cette valeur propre. D'une part, $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ d'après la question 3. D'autre part, $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \dfrac{2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ d'après la question 1. Or $\left|\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ d'après la question 2. D'où $-2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \leq 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2$. Donc
$$0 = \frac{2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \leq \lambda \leq \frac{2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = 4.$$

Exercice 3. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A\, {}^tB)$.

1. On note $\mathcal{A}_n$ le *sev* des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n$ le *sev* des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :
   (a) $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$;
   (b) $\mathcal{A}_n^\perp = \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}_n^\perp = \mathcal{A}_n$;
   (c) pour tout $(M, S) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n$, $\|\frac{M-M^T}{2}\| \leq \|M - S\|$. Quelle est la distance $d(M, \mathcal{S}_n)$ de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n$?
2. On considère le cas $n = 2$. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   (a) Déterminer une base de $F^\perp$ $\triangleright$ **Le corrigé propose deux méthodes.**
   (b) Déterminer la matrice A', image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la projection orthogonale sur F $\triangleright$ **Le corrigé propose trois méthodes.**

---

1. (a) Soient $A \in \mathcal{A}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$: on veut montrer que $A \perp S$. Or $< A, S >= \operatorname{tr}(A \cdot^t S) = \operatorname{tr}(A \cdot S)$ car S est symétrique et

$$\begin{aligned} < S, A > &= \operatorname{tr}(S \cdot^t A) = Tr(S \cdot (-A)) \text{ car } A \text{ est antisymétrique} \\ &= -\operatorname{tr}(S \cdot A) \text{ car tr est linéaire} \\ &= -\operatorname{tr}(A \cdot S) \text{ car } \operatorname{tr}(A \cdot S) = \operatorname{tr}(S \cdot A). \end{aligned}$$

D'où $< A, S >= 0$. Donc les *sev* $\mathcal{A}_n$ et $\mathcal{S}_n$ sont orthogonaux : $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$.

(b) De $\mathcal{A}_n \perp \mathcal{S}_n$, on déduit que : $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^\perp$ $\triangleright$ **proposition 17**.
Or le *sev* $\mathcal{S}_n$ est de dimension finie, d'où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{S}_n^\perp$ $\triangleright$ **corollaire 23**. Or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$, d'où $\dim \mathcal{A}_n = \dim \mathcal{S}_n^\perp$.
De $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{S}_n^\perp$ et $\dim \mathcal{A}_n = \dim \mathcal{S}_n^\perp$, on déduit que $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}_n^\perp$.
De même $\mathcal{A}_n^\perp = \mathcal{S}_n$.

(c) Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: de $M = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$, on déduit que $\frac{M+M^T}{2} = p(M)$ est le projeté orthogonal de la matrice M sur le *sev* $\mathcal{S}_n$. D'après le théorème des moindres carrés,
- pour tout $S \in \mathcal{S}_n$: $\|M - p(M)\| \leq \|M - S\|$, d'où $\|\frac{M-M^T}{2}\| \leq \|M - S\|$;
- $d(M, \mathcal{S}_n) = \min\limits_{S \in \mathcal{S}_n} \|M - S\| = \|M - p(M)\| = \|\frac{M-M^T}{2}\|$.

2. (a) Voici <u>**deux méthodes**</u> :
   — La dimension du *sev* F est finie : elle vaut 2 . D'où $F \oplus F^\perp = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\dim(F^\perp) = 2$. De plus, on est inspiré et on constate que les deux vecteurs

$$e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas colinéaires, et qu'ils sont orthogonaux à F. Ils forment donc une base de $F^\perp$.
   — Les matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de F. Soit une matrice $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$:

$$B \perp F \iff \begin{cases} B \perp e_1 \\ B \perp e_2 \end{cases} \iff \begin{cases} < B, e_1 >= 0 \\ < B, e_2 >= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff B = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = xe_3 + ye_4.$$

   (b) Voici <u>**trois méthodes**</u> :
   — On est inspiré et on constate que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Or la première matrice appartient à F et la seconde appartient à $F^\perp$. Donc le projeté orthogonal de A sur F est $A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

— La matrice A' est l'unique matrice telle que $(*)$ $A' \in F$ et $(**)$ $A - A' \perp F$.

D'abord $(*) \iff \exists a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R},\ A' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Ensuite

$$A - A' \perp F \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ 1-b & a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ 1-b & a \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} 1-2a = 0 \\ 1-2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

— On transforme la base (e_1, e_2) de F formée par les matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en une *b.o.n.* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt. Puis on calcule la matrice $A' =< A, \varepsilon_1 > \varepsilon_1 + < A, \varepsilon_2 > \varepsilon_2$. Essayez, mais c'est un peu plus long.

Exercice 4. Montrer que la fonction f définie pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (t - a\sin t - b\cos t)^2 dt$$

possède un minimum et calculer $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} f(a,b)$.

Corrigé manuscrit ci-dessous.

Exercice 5. 1. Montrer que $< P\,|Q >= P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes.

2. Calculer $< X^p\,|X^q >$ pour chaque entier naturel p et chaque entier naturel q.
3. Soient F l'ensemble des polynômes constants et G l'ensemble des polynômes admettant 0 pour racine. Montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.
4. Déterminer l'orthogonal de F et l'orthogonal de G.
5. Montrer que la distance d'un polynôme P au sous-espace vectoriel G vaut $|P(0)|$.

---

1. Soient λ, μ dans $\mathbb{R}$ et P, Q, R dans $\mathbb{R}[X]$:
   - $< P|Q >=< Q|P >$;
   - $\langle \lambda P + \mu Q | R\rangle = \lambda\langle P|R\rangle + \mu\langle Q|R\rangle$ (par linéairité de la dérivée et de l'intégrale), d'où la linéarité à gauche, et à droite par symétrie ;
   - $\langle P|P\rangle = P^2(0) + \int_0^1 [P'(t)]^2\ dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale ;
   - si $\langle P|P\rangle = 0$, alors chaque terme positif est nul, d'où $P(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1],\ P'(t) = 0$ car la fonction $t \mapsto [P'(t)]^2$ est continue et positive. D'où la fonction $t \mapsto P(t)$ est constante sur $[0,1]$ et nulle en 0, donc elle est nulle sur $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$.

   Donc la forme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire.
2. Si p et q sont dans $\mathbb{N}^*$, alors $\langle X^p|X^q\rangle = 0 + \int_0^1 pt^{p-1}qt^{q-1}\,dt = \dfrac{pq}{p+q-1}$.

   Si $(p,q) = (0,0)$, alors $\langle 1|1\rangle = 1\cdot 1 + \int_0^1 0\,dt = 1$.

   Si $p = 0$ et $q \neq 0$, alors $\langle 1|X^q\rangle = \langle 1|X^q\rangle = 1\cdot 0 + \int_0^1 0\cdot qt^{q-1}\,dt = 0$. De même si $p \neq 0$ et $q = 0$.
3. Soient $P \in F$ et $Q \in G$: $< P|Q >= P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt$. Or $Q(0) = 0$ car $Q \in G$ et $\forall t \in [0,1],\ P'(t) = 0$ car $P \in F$. D'où $< P|Q >= 0$. Donc $F \perp G$.
4. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$:

   $Q \in F^\perp \iff \forall P \in F,\ \langle P|Q\rangle = 0 \iff \forall P \in F,\ P(0)Q(0) = 0 \iff \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha Q(0) = 0 \iff Q(0) = 0 \iff Q \in G$.

   Donc $F^\perp = G$. De plus, F est de dimension finie (car $\dim F = 1$), d'où $\left(F^\perp\right)^\perp = F$, donc $G^\perp = F$.

5. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$: d'après le théorème des moindres carrés, $d(P,G) = \|\pi(P)\|$, où π est la projection orthogonale sur le *sev* F. Or le polynôme P se décompose en $P(X) = P(0) + [P(X) - P(0)]$, où $P(0) \in F$ et $P(X) - P(0) \in G$. D'où $\pi(P) = P(0)$, donc $d(P,G) = \|P(0)\| = \sqrt{\langle P(0)|P(0)\rangle} = \sqrt{P^2(0) + \int_0^1 0\,dt} = |P(0)|$.

Exercice 6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. Tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg(P)} a_n X^n$ sera aussi noté $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ où a_n est une suite nulle à partir d'un certain rang.

1. Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ la forme linéaire qui, à tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$, associe le réel $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$.
Montrer que l'application f surjective.
2. Le produit scalaire de deux polynômes $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ et $Q = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ est défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.
Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout polynôme P de E,
$$|f(P)| \leq K \cdot \|P\|.$$
3. Soit F le noyau de f. Vérifier que le polynôme
$$R_{ij} = (j+1)X^j - (i+1)X^i$$
appartient à $\mathrm{Ker}(f)$ pour tous entiers naturels i et j.
4. En déduire que $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ et que $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Remarque — L'application f est une forme linéaire non nulle, le *sev* F est donc un hyperplan. La dernière question prouve ainsi que, en dimension infinie, l'orthogonal d'un hyperplan n'est pas toujours une droite.
▷ **proposition VIII.27** & https://math-os.com/orthogonal-sev/

---

1. On veut montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f(P) = y$. Soit le polynôme $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ défini par $a_0 = y$ et $\forall n \geq 1,\ a_n = 0$. Son image est $f(P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} = y$. Donc f est surjective.
2. Soit P un polynôme, de degré $\deg P$: $f(P) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} \frac{a_n}{n+1} = (u|v)$ où $(u|v)$ est le produit scalaire canonique dans l'*ev* $\mathbb{R}^{1+\deg P}$ des deux vecteurs $u = \left(\frac{1}{0+1}, \cdots, \frac{1}{\deg(P)+1}\right)$ et $v = (a_0, \cdots, a_{\deg P})$. Doù (inégalité de Cauchy-Schwarz) $|f(P)| \leq \sqrt{(u|u)} \cdot \sqrt{(v|v)} = \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} \frac{1}{(n+1)^2}} \cdot \sqrt{\displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} a_n^2}$. Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\deg P} a_n^2 = \|P\|^2$.
Donc, pour tout polynôme P, $\boxed{|f(P)| \leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \cdot \|P\|.}$
3. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $f(R_{ij}) = \dfrac{j+1}{j+1} - \dfrac{i+1}{i+1} = 0$, d'où $R_{ij} \in \mathrm{Ker} f$.
4. Soit $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$. Si $P \in F^\perp$, alors $P \perp R_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$. Or $\langle P|R_{ij}\rangle = (j+1)a_j - (i+1)a_i$. D'où $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ (i+1)a_i = (j+1)a_j$. En particulier $\forall i \in \mathbb{N},\ a_i = \dfrac{a_0}{i+1}$. D'où $\forall i \in \mathbb{N},\ a_i = 0$. Doù P est le polynôme nul. Donc $F^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Par suite, $(F^\perp)^\perp = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}^\perp = \mathbb{R}[X]$ est différent de F car $1 \notin F$ (car $f(1) = 1 \neq 0$).

Exercice 7. On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P(X)|Q(X)\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et on définit la forme linéaire $h : E \to \mathbb{R},\ P(X) \mapsto P(0)$. On suppose qu'un polynôme $A(X)$ est tel que $h(P(X)) = \langle A(X)|P(X)\rangle$ pour tout $P(X) \in E$. Calculer $\langle A(X)|XA(X)\rangle$ et conclure.

On fait l'hypothèse qu'il existe un polynôme $A(X)$ tel que $P(0) = \langle A(X)|P(X)\rangle$ pour tout $P(X) \in E$.

D'une part, $\langle A(X)|XA(X)\rangle = \int_0^1 A(t)tA(t)\,dt = \int_0^1 tA^2(t)\,dt$ par définition du produit scalaire dont on a muni dans cet exercice l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$.

D'autre part, $\langle A(X)|XA(X)\rangle = h(XA(X)) = 0A(0) = 0$ par hypothèse.

D'où $\int_0^1 tA^2(t)\,dt = 0$. Or la fonction $t \mapsto tA^2(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$. Donc elle est nulle car d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Par suite, le polynôme $XA^2(X)$ a une infinité de racines (car tous les réels de $[0,1]$ le sont). Or le polynôme X n'est pas nul, donc c'est le polynôme $A(X)$ qui est nul. (Pour rappel, si le produit de deux polynômes est nul, alors au moins un des polynômes est nul, autrement dit : l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est intègre.)

C'est absurde car $\langle A(X)|1_{\mathbb{R}[X]}\rangle = 1_{\mathbb{R}} \neq 0$ par hypothèse. Donc il n'existe pas de polynôme $A(X)$ tel que $P(0) = \langle A(X)|P(X)\rangle$ pour tout $P(X) \in E$. On vient de prouver, par un contre-exemple, que le théorème de représentation de Riesz ▷ **VIII.29** n'est pas valable en dimension infinie.

Exercice 8 (Projecteurs spectraux – tiré du sujet E3A Maths 1 PSI 2016)**.**

Soient un entier $n \geq 2$ et n réels $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ supposés distincts deux à deux. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est $\{a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n\}$.

1. Les matrices M^T et M ont-elles le même spectre ? Sont-elles diagonalisables ?
2. Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on note V_i un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(a_iI_n - M)$ et W_i un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(a_iI_n - M^T)$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
   (a) Montrer que, si $i \neq j$, alors $V_i^T\,W_j = 0$.
   (b) Qu'en déduire sur les sous-espaces propres de M et de M^T ?
3. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $V_i^T\,W_i \neq 0$. Que représente la matrice $\dfrac{1}{V_i^T\,W_i}\ V_i\,W_i^T$?

---

1. La matrice M est de taille n et possède n valeurs propres distinctes deux à deux, donc elle diagonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ P^{-1}MP = D$, où $D = \operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_n)$. Par suite (en transposant) : $Q^{-1}M^TQ = D$, où $Q = (P^{-1})^T$, donc M^T est aussi diagonalisable.
2. (a) On calcule de deux manières le réel $V_i^TM^TW_j$:
   — d'une part, $M^TW_j = a_jW_j$, d'où $V_i^TM^TW_j = V_i^T(a_jW_j) = a_jV_i^TW_j$;
   — d'autre part, $MV_i = a_iV_i$, d'où $W_j^TMV_i = W_j^T(a_iV_i) = a_iW_j^TV_i$.

   Or $V_i^TW_j = W_j^TV_i$ et $V_i^TM^TW_j = W_j^TMV_i$ (ce sont des réels, autrement dit des matrices de taille 1, égales à leur transposée). D'où $a_jV_i^TW_j = a_ijV_i^TW_j$, d'où $(a_i - a_j)V_i^TW_j = 0$. Or le réel $a_i - a_j$ n'est pas nul si $\neq j$ car les valeurs propres sont supposées distinctes deux à deux. Donc le réel $V_i^TW_j$ est nul si $i \neq j$.

   (b) Les sous-espaces propres de M et de M^T associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux :
   $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \implies SEP_M(a_i) \perp SEP_{M^T}(a_j).$$
3. Par l'absurde : supposons que $V_i^TW_i = 0$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ V_i \perp W_j$. Or les vecteurs W_j forment une base de $\mathbb{R}^n$ car la matrice M^T est diagonalisable. D'où V_i est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$, donc $V_i = 0$. C'est absurde car V_i est non nul par hypothèse.

   On peut donc diviser par le réel $V_i^TW_i$ pour construire la matrice carrée $A_i = \dfrac{1}{V_i^T\,W_i}\ V_i\,W_i^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Appliquons cette matrice à chaque vecteur V_k :
   $$A_iV_k = \frac{1}{V_i^T\,W_i}\ V_i\,W_i^TV_k = \begin{cases} 0_{\mathbb{R}^n} \text{ si } k \neq i \\ V_i \text{ si } k = i. \end{cases}$$

   Donc la matrice A_i représente (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) le projecteur sur le sous-espace propre $SEP_M(a_i)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres $\bigoplus_{k \neq i} SEP_M(a_k)$.