Corrigé du T.D. n° 7

Séries de fonctions

5 décembre 2024

Exercice 1. Soient l'intervalle $I =]1, +\infty[$ et, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ et chaque $x \in I$,

$$f_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(k \cdot x)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur I.
2. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et chaque $x \in I$,

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad , \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

   Montrer que la fonction S est continue sur I.
3. Etudier, de deux manières, $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.
4. Montrer que la fonction S est dérivable sur I. La fonction S est-elle (strictement) (dé)croissante sur I ?

---

1. Soit $x > 1$: la suite $\left(\frac{1}{\ln(kx)}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant, d'où (théorème des séries alternées) la série $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{\ln(k \cdot x)}$ est convergente.
   Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $I =]1, +\infty[$.
2. Soit $x > 1$: d'après le théorème des séries alternées, $|R_n(x)| \leq \left| \dfrac{1}{\ln[(n+1)x]} \right| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ qui est un majorant.
   D'où $\sup\limits_{x \in I} |R_n(x)| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ car le *sup* est le plus petit majorant. Or $\dfrac{1}{\ln(n+1)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$.
   D'où $\sup\limits_{x \in I} |R_n(x)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers la fonction $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Or chaque fonction f_n est continue sur I. Donc la fonction S est continue sur I.
3. D'après le théorème des séries alternées, pour tout $x \in I$, $\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{\ln(2x)} \leq S(x) \leq \dfrac{1}{\ln x}$.
   Donc (théorème des gendarmes) : $S(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Autre méthode : On utiise le « théorème d'interversion somme-limite » ou « de la double limite ».
   La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $I =]1, +\infty[$ et chaque fonction f_n admet une limite finie en $+\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$.
4. Soit $x \in I$: la fonction f_n est dérivable en x et $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}$. La fonction $x \mapsto f_n'(x)$ est continue sur I, d'où f_n est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour chaque $x \in I$, a série $\sum f_n'(x)$ est alternée, d'où (de même que pour la question 2, on montre que) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.
   D'où $\begin{cases} \text{la série } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ \text{la série } \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$, donc (théorème de dérivation terme à terme) :
   — la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

— pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x \ln^2(nx)}$.

Or (théorème des séries alternées) : $S'(x) \leq \frac{-1}{x \ln^2(x)} + \frac{1}{x \ln^2(2x)} < 0$ pour tout $x \in I$.

Donc S est strictement décroissante sur I.

Exercice 2. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge sur $\mathbb{R}$: normalement ? uniformément ? simplement ?
2. Soit $x \neq 0$. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt$$

sont convergentes et les calculer.

3. Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.
4. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

---

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément, donc simplement) sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \neq 0$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + x^2}\, dt$ est impropre en $+\infty$. Soit $a > 0$. Pour calculer $\int_0^a \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt$, on fait le changement de variable $u = \frac{t}{x}$: la fonction $t \mapsto \frac{t}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'où $\int_0^a \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{a/x} \frac{1}{1 + u^2} x\, du = \frac{1}{x} \text{Arctan}\left(\frac{a}{x}\right)$. Or $\frac{1}{x} \text{Arctan}\left(\frac{a}{x}\right) \underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2|x|}$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2|x|}$.

   De même, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2|x|} - \frac{1}{x} \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On compare série et intégrale : la fonction $t \mapsto \frac{1}{x^2+t^2}$ étant décroissante,

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt \leq \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \leq \int_0^N \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt.$$

   Ces inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$ car la série converge (d'après la question 1) et parce que les intégrales convergent (d'après la question 2), d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^2}\, dt.$$

   D'où (en divisant par $\frac{\pi}{2x}$ qui est strictement positif) :

$$1 - \frac{2}{\pi} \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{S(x)}{\frac{\pi}{2x}} \leq 1.$$

   D'où (théorème des gendarmes) $\frac{S(x)}{\frac{\pi}{2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $S(x) \underset{x \to \infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.
4. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est dérivable. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2}$. D'où f_n' est continue, donc f_n est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a > 0$:
   — la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[-a, +a]$;
   — $\begin{cases} \forall x \in [-a, +a],\ |f_n'(x)| \leq \dfrac{2a}{n^4} \\ \text{et la série } \sum \frac{1}{n^4} \text{ converge} \end{cases}$,

   d'où la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément (car normalement) sur $[-a, +a]$;

— donc la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, +a]$.

C'est vrai pour tout $a > 0$. Donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Etudier $\sup\limits_{[0,+\infty[} |f_n|$. La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle normale sur $[0, +\infty[$?
3. Soit, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction S est croissante sur $[0, +\infty[$.
5. Soient un entier $n \geq 1$ et un réel $a \geq n$. Montrer que $S(a) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
6. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$ ▷ **trois méthodes dans le corrigé**.
7. Montrer que $S(x) = \underset{+\infty}{o}(x)$.
8. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

---

1. Soit $x \in [0, +\infty[$: $0 \leq f_n(x) \leq \frac{x}{n^{3/2}}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, d'où la série $\sum f_n(x)$ converge.

   Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. $\forall x \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{x+n}$, d'où $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sup\limits_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sup\limits_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge. Donc la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normale sur $[0, +\infty[$.
3. On sait que chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que la série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

   On montre que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$: $\forall x \geq 0,\ f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$, d'où la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

   Donc la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$.
4. Pour tout $x \geq 0$, $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2} \geq 0$, donc la fonction S est croissante sur $[0, +\infty[$.
5. Soient un entier $n \geq 1$ et un réel $a \geq n$: $S(a) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a}{\sqrt{k}(a+k)} \geq \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a}{\sqrt{k}(a+k)}$.

   Or $\frac{a}{a+k} \geq \frac{1}{2}$ pour tout $k \leq n \leq a$, d'où $S(a) \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
6. La série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, d'où : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq M$. Alors $\forall a \geq n,\ S(a) \geq M$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$.

   Deuxième méthode : $\lfloor x \rfloor \leq x$, d'où $S(x) \geq \sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2\sqrt{k}}$. Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, d'où $\sum\limits_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{2\sqrt{k}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc, par comparaison, $S(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

TROISÈME MÉTHODE : d'une part, la fonction S est croissante d'après la question 4. D'après le théorème de la limite monotone, la limite de $S(x)$ quand le réel x tend vers $+\infty$ existe donc.

D'autre part, $S(n) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, d'ou $S(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par unicité de la limite, $S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

7. Soient, pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{x}$ et $T(x) = \dfrac{S(x)}{x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$. On veut montrer que : $T(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $]0, +\infty[$ car : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \geq 0,\ 0 \leq g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}(x+n)} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ et la série numérique $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

   D'une part $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$; d'autre part la série de fonctions $\sum g_n$ converge (normalement, donc) uniformément sur $[0, +\infty[$. On peut donc intervertir somme et limite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x\to+\infty} g_n(x)\right) = 0$.

8. On montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$ par l'absurde, en utilisant la question 6 et le théorème de la double limite. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$. Alors la série numérique $\displaystyle\sum \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ converge. C'est absurde car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exercice 4 (tiré de CCP Maths 1 MP 2015)**.**

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx} - 2\mathrm{e}^{-2nx}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: montrer que la fonction f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

   Calculer, pour chaque réel x strictement positif, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

   Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$ est convergente et la calculer.
3. En déduire, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$.

---

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-nx} + 2\mathrm{e}^{-2nx}$ et les intégrales $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nx}\,dx$ convergent, donc $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$ converge. Et $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,dx - 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2nx}\,dx = 0$.
2. Soit $x > 0$: les séries $\sum \mathrm{e}^{-nx}$ et $\sum \mathrm{e}^{-2nx}$ sont des séries géométriques de raisons strictement inférieures à 1 (car $x > 0$), donc la série $\sum f_n(x)$ est convergente car c'est une combinaison linéaire de deux séries convergentes. Calculons la somme partielle :

$$\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-nx} = \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-Nx}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}^{-2nx} = \mathrm{e}^{-2x} \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-2Nx}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-2x} \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2x}}.$$

   Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction

$$S : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}} - 2\mathrm{e}^{-2x} \cdot \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x} \cdot (1 + \mathrm{e}^{-x}) - 2\mathrm{e}^{-2x}}{1 - \mathrm{e}^{-2x}} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1 + \mathrm{e}^{-x}}.$$

   Soit $a > 0$. Pour calculer $\int_0^a S(x)\,dx$, on fait le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-x}$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, d'où :

$$\int_0^a S(x)\,dx = -\int_1^{\mathrm{e}^{-a}} \frac{1}{1+u}\,du = -\left[\ln|1+u|\right]_1^{\mathrm{e}^{-a}} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2.$$

   D'où l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx$ converge et vaut $\ln 2$.
3. D'après le théorème d'intégration terme et terme sur un intervalle quelconque, si :
   - (i) la série $\sum f_n(x)$ converge vers $S(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$;
   - (ii) la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$ converge ;

   alors S est intégrable et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} S(x)\,dx$.

Or $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ d'après la question 1 et $\int_0^{+\infty} S(x)\,dx = \ln 2$ d'après la question 2, d'où (par l'absurde) : (i) ou (ii) est faux. Or (i) est vrai d'après la question 2. D'où (ii) est faux. $\boxed{\text{Donc la série } \sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx \text{ diverge.}}$

Exercice 5. Soient une suite numérique $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum c_n$ converge absolument et, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$f_n\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto c_n \frac{t^n}{n!}.$$

1. Soit un réel $a > 0$. Montrer que la série numérique $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente et en déduire que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, +a]$.
2. Montrer que la fonction $f\ :\ t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et la calculer.
4. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et qu'elle est égale à $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ▷ **théorème 16**.

---

1. La suite $u_n = \frac{a^n}{n!}$ est strictement positive et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\sum u_n$ converge d'après la règle de D'Alembert.
   La série $\sum c_n$ étant convergente, la suite c_n tend vers 0 et est donc bornée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |c_n| \leq M$. Pour tout $(n,t) \in \mathbb{N} \times [-a, +a]$, $|f_n(t)| = |c_n| \frac{|t|^n}{n!} \leq M \frac{a^n}{n!}$. Or la série numérique $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente d'après la question précédente. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, +a]$.
2. Soit $a > 0$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, +a]$, or chaque fonction f_n est continue sur $[-a, +a]$, donc la fonction f est définie et continue sur $[-a, +a]$. Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc aussi sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^n \mathrm{e}^{-t} = t^n \mathrm{e}^{-t/2} \mathrm{e}^{-t/2} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$. Or $\mathrm{e}^{-t/2}$ ne change pas de signe et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\,dt$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et on montre par récurrence que $\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}\,dt = 1$.
4. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $g_n\ :\ t \mapsto f_n(t)\mathrm{e}^{-t}$. On utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque :
   — chaque fonction g_n est intégrable d'après la question précédente ;
   — la série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $g\ :\ t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t}$ *cpm* d'après la question 2 ;
   — la série numérique $\sum \int_0^{+\infty} |g_n|$ est convergente car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} |g_n| = |c_n|$ (d'après la question précédente) et la série numérique $\sum c_n$ converge absolument par hypothèse.

   D'où la fonction g est intégrable et $\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t)\,dt$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et égale à $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Exercice 6 (La fonction zêta de Riemann)**.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$f_n\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.
2. Soit $a > 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. Calculer $\sup_{x\in I} |f_n(x)|$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normale sur l'intervalle I.

4. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur l'intervalle I.
5. Montrer que la fonction $\zeta\,:\,x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est définie et continue sur I.
6. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que, pour tout $x \in I$, $\zeta'(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.
7. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ ▷ **exo 7 du TD 1**.

---

1. Soit $x > 1$. D'après le critère de Riemann, la série numérique $\sum \frac{1}{n^x}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.
2. Pour tout $x \geq a$, $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$. Or la série numérique $\sum \frac{1}{n^a}$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. Par l'absurde : supposons qu'il existe une suite u_n telle que $\begin{cases} \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq u_n \\ \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$. Or $\displaystyle\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$, d'où $u_n \geq \frac{1}{n}$.
Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. C'est absurde. Donc la convergence n'est pas normale sur I.
4. Par l'absurde. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{x\to1+}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$, d'où : si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors (théorème de la double limite) la série numérique $\sum \frac{1}{n}$ converge. C'est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme sur I.
5. La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I, donc sa somme ζ est définie sur $I =]1, +\infty[$.
Soit $a > 1$. La série de fonctions $\sum f_n$ converge (normalement d'après la question 2, donc) uniformément sur $[a, +\infty[$ et chaque fonction f_n est continue sur $[a, +\infty[$, d'où la fonction $\zeta = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $[a, +\infty[$.
Ceci est vrai pour tout $a > 1$, donc la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
6. Soit $a > 1$. On va appliquer le théorème de dérivation terme à terme sur l'intervalle $[a, +\infty[$:
   — pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[,\ f_n'(x) = \frac{-\ln n}{n^x}$;
   — la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a, +\infty[$ d'après la question 1 ;
   — la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, +\infty[$.
   En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a, +\infty[,\ |f_n'(x)| \leq \frac{\ln n}{n^a}$ et la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge car
   $\frac{\ln n}{n^a} = \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \cdot \frac{1}{n^{a-\varepsilon}} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{a-\varepsilon}}\right)$, en choisissant $\begin{cases} \varepsilon > 0 \\ a - \varepsilon > 1 \end{cases}$.

   Donc la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et $\forall x \in [a, +\infty[,\ \zeta'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$. Ceci est vrai pour tout $a > 1$, donc : la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ \zeta'(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.
7. Soit $a > 1$. On va appliquer le théorème de la double limite sur l'intervalle $[a, +\infty[$: la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n > 1 \end{cases}$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

Exercice 7 (théorème de la convergence dominée)**.** Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]0, 1[$, on note

$$f_n(t) = (-1)^n t^n f(t) \qquad \text{et} \qquad S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t).$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in]0, 1[,\ |S_n(t)| \leq |f(t)|$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in]0,1[$: $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k f(t) = f(t) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = f(t) \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)}$. Or, d'après l'inégalité triangulaire, $|1-(-t)^{n+1}| \leq 1 + t^{n+1} \leq 1 + t$, donc $|S_n(t)| \leq |f(t)|$.
2. On applique le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions (S_n) qui est dominée grâce à la question précédente :
   — (S_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{1+t}$ qui est *cpm* car f l'est par hypothèse ;
   — pour tout $(n,t) \in \mathbb{N}\times]0,1[$, $|S_n(t) \leq |f(t)|$ indépendant de n et $\int_0^1 |f|$ est convergente car f est intégrable par hypothèse.

   Donc on peut intervertir limite et intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(t)\, dt = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\, dt$ est égal à

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 S_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f_k(t)\, dt.$$