CORRIGÉ DE LA COLLE N° 10

Séries de fonctions

5 DÉCEMBRE 2024

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas normale sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la convergence est normale sur $[a, +\infty[$.
4. Soit un entier naturel $p > 0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.
5. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$? sur $]0, +\infty[$?
   ▷ **Trois méthodes dans le corrigé**.

---

1. Soit $x > 0$: $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $n^2 f_n(x) = n^3 x^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \dfrac{1}{x^4} y_n^6 \mathrm{e}^{-y_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, avec $y_n = x\sqrt{n}$.
   Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum f_n(x)$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Et si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$, d'où la série $\sum f_n(0)$ converge. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
2. Chaque fonction f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f_n'(x) = nx(2 - x\sqrt{n})\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$. D'où $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.
   D'où la série $\displaystyle\sum \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)|$ diverge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$..
3. (La même méthode a été utilisée à la ▷ **q.3 de l'exo 1 du TD n° 5**.) À partir d'un certain rang n, $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq a$, d'où (tableau des variations) : $\forall x > a$, $\displaystyle\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a)$ Or la série $\sum f_n(a)$ converge d'après la question 1, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq f_p\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) = \frac{4}{\mathrm{e}^2}$.
5. Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$:
   — PREMIÈRE MÉTHODE ▷ **théorème 9 du chapitre VII**. $S(0) = 0$ mais $S\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$ ne tend pas vers 0 quand $p \to \infty$ car $S\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geq \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$. D'où la fonction S n'est pas continue en 0, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$. (Par l'absurde : si la convergence était uniforme sur $[0, +\infty[$, alors la fonction S serait continue sur $[0, +\infty[$ car chaque fonction f_n l'est.) Cette méthode ne permet pas de conclure sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   — DEUXIÈME MÉTHODE ▷ **théorème 12 du chapitre VII**. Pour chaque n, $f_n(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 mais $S(x)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$. (Par l'absurde : si la convergence était uniforme sur $]0, +\infty[$, alors $\lim_{x\to 0} S(x)$ serait égal $\sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} f_k(x)$ d'après le théorème de la double limite.) *A fortiori*, il n'y a pas non plus convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

— Troisième méthode ▷ **méthode 3 du chapitre VII**. La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$ car la suite des fonctions f_n ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle car $f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2}$ ne tend pas vers 0. *A fortiori*, il n'y a pas non plus convergence uniforme sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x > -1$, $f_k(x) = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}$.

1. Montrer que $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$ est défini pour tout réel $x > -1$.
   Et que la fonction S est monotone sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.
2. Soit $a > -1$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $]-1,a]$.
   Et que la fonction S est continue sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$:
$$S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}.$$
   Et déterminer un équivalent de $S(x)$ quand le réel x tend vers -1^+.
4. Déterminer un équivalent de $S(n)$ quand l'entier n tend vers ∞.
5. Montrer que la fonction S possède une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.
6. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

---

1. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_k : x \mapsto \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$ est définie sur $]-1,+\infty[$. Soit $x > -1$: $f_k(x) = \dfrac{x}{k(k+x)}$, d'où $|f_k(x)| \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{k^2}$. La série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, d'où la série numérique $\sum f_k(x)$ converge (absolument). Donc la fonction S est définie pour tout $x > -1$.
   Soient deux réels x et y tels que $-1 < x \leq y$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k(x) \leq f_k(y)$, d'où $S(x) \leq S(y)$. La fonction S est donc croissante.
2. Soit $a > -1$. Pour tous $k \geq 2$ et $x \in]-1,a]$, $|f_k(x)| \leq \dfrac{\max(1,|a|)}{k(k-1)}$. Or la série $\sum \dfrac{\max(1,|a|)}{k(k-1)}$ converge. D'où la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement sur $]-1,a]$.
   La série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement, donc uniformément sur $]-1,a]$. Or chaque fonction f_k est continue sur $]-1,a]$. . Donc la fonction S est continue sur $]-1,a]$. C'est vrai pour tout $a > -1$. Donc la fonction S est continue sur $]-1,+\infty[$.
3. Soit, pour chaque $n \geq 1$ et chaque $x > -1$, la somme partielle $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$:
   $S_n(x+1) - S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+1+x}\right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{n+1+x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x}$. D'où $S(x+1) - S(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Doù $\dfrac{S(x)}{\frac{-1}{1+x}} = 1 + \dfrac{S(x+1)}{\frac{-1}{1+x}} = 1 - (1+x)S(x+1)$. Si x tend vers -1^+, alors $S(x+1)$ tend vers $S(0)$ car S est continue (d'après la question 2). D'où $(1+x)S(x+1)$ tend vers $0S(0) = 0$. Donc $\dfrac{S(x)}{\frac{-1}{1+x}}$ tend vers 1. Donc $S(x) \sim \frac{-1}{1+x}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $S(n) = S(0) + \sum_{k=0}^{n-1}[S(n+1) - S(n)]$. Or $S(0) = 0$ et, d'après la question 3, $S(n+1) - S(n) = \frac{1}{n+1}$. D'où $S(n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln(n)$ (comparer série et intégrale).
5. La fonction S est croissante, donc elle possède une limite en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Or $S(n)$ tend vers $+\infty$ car équivalent à $\ln(n)$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$.
6. Pour tout $x > -1$, $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$, d'où $S(\lfloor x\rfloor) \leq S(x) \leq S(\lfloor x\rfloor + 1)$ car la fonction S est croissante. D'où, pour tout $x > 1$, $\dfrac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln(\lfloor x\rfloor + 1)} \leq \dfrac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln(x)} \leq \dfrac{S(x)}{\ln(x)} \leq \dfrac{S(\lfloor x\rfloor + 1)}{\ln(x)} \leq \dfrac{S(\lfloor x\rfloor + 1)}{\ln\lfloor x\rfloor}$. Étudions le premier gendarme : $S(\lfloor x\rfloor) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\lfloor x\rfloor$ d'après la question 8, d'où $\dfrac{S(\lfloor x\rfloor)}{\ln(\lfloor x\rfloor + 1)} \sim \dfrac{\ln\lfloor x\rfloor}{\ln(\lfloor x\rfloor + 1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\ln(\lfloor x\rfloor + 1) = \ln\lfloor x\rfloor + \ln\left(1 + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right) = \ln(\lfloor x\rfloor) \cdot \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor})}{\ln(\lfloor x\rfloor)}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\lfloor x\rfloor$. De même pour le second gendarme. D'où $\dfrac{S(x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $S(x) \sim \ln(x)$.