Programme de la colle n° 11

Semaine du 9/12/2024

- **Séries de fonctions** ▷ **chapitre VII & TD n° 7** :
  - — savoir montrer qu'une série de fonctions converge simplement, uniformément voire normalement sur une partie I de $\mathbb{R}$;
  - — une série de fonctions converge uniformément *ssi* la suite des restes converge uniformément vers 0 (la fonction nulle) ;
  - — si une série de fonctions converge uniformément, alors la suite de fonctions converge uniformément vers 0 (la fonction nulle) ;
  - — la convergence uniforme sur un intervalle I préserve la continuité sur I ;
  - — (intervertir $\lim\limits_{x\to a}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$) théorème de la double limite ;
  - — (intervertir $\int$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$) intégrer terme à terme grâce à un théorème où la série de fonctions converge uniformément sur un segment & grâce à un théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque ;
  - — (intervertir $\dfrac{d}{dx}$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$) théorème de dérivation terme à terme & généralisation à une classe $\mathcal{C}^k$;
  - — savoir utiliser ces théorèmes sur des intervalles plus restreints que I puis étendre la conclusion (si c'est une propriété locale) à l'intervalle I ;
  - — savoir utiliser ces théorèmes pour montrer par l'absurde qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément sur I.

- **Produits scalaires** ▷ **chapitre VIII & TD n° 8** :
  - — produits scalaires et norme associée sur un $\mathbb{R}-ev$ E de dimension infinie ou finie, notamment les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b])$ et $L_2(I)\cap\mathcal{C}(I)$;
  - — égalités de polarisation et du parallélogramme, inégalités de Cauchy-Schwarz (et CNS d'égalité) et triangulaire ;
  - — orthogonalité de deux vecteurs, d'un vecteur et d'une partie, de deux parties ; théorème de Pythagore (CNS dans le cas de 2 vecteurs, CN dans le cas de $n>2$ vecteurs) ;
  - — orthogonal d'une partie A, $A\perp B \iff A\subset B^\perp \iff B\subset A^\perp$, $A\subset (A^\perp)^\perp$, $A^\perp$ est un *sev*, A *sev* $\implies A\cap A^\perp=\{0_E\}$;
  - — liberté d'une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux ;
  - — familles et bases orthonormées, algorithme de Gram-Schmidt ; dans une *b.o.n*, expression du produit scalaire de deux vecteurs et de la matrice d'un endomorphisme ;
  - — existence, unicité et formule de la projection orthogonale d'un espace préhilbertien E sur un *sev* F de dimension finie ;
  - — théorème des moindres carrés, distance $d(x,F)$ d'un vecteur $x\in E$ à un *sev* F de dimension finie ;
  - — le *sev* F est de dimension finie $\implies F\oplus F^\perp=E \implies F=(F^\perp)^\perp$;
  - — ~~l'orthogonal d'une droite est un hyperplan~~ ;
  - — ~~en dimension finie, l'orthogonal d'un hyperplan est une droite, théorème de représentation de Riesz, distance d'un vecteur à un hyperplan ou à une droite~~.