Exercice 1 - Série de fonction (⋆⋆⋆)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positive et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$ où $x \in [0,1]$.

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

On remarque dans un premier temps que pour $x = 0$ et $x = 1$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = 0$. De plus, pour $x \in]0,1[$ on a :

$$0 \leq u_n(x) = a_n x^n (1-x) \leq a_0 x^n$$

Or la série de terme général $a_0 x^n$ est convergent car il s'agit d'une série géométrique de raison $0 < x < 1$. On en déduit qu'il en est de même pour la série de terme $u_n(x)$ d'où la convergence simple.

2. Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est dérivable sur $]0,1[$ et de plus on trouve après simplification $u_n'(x) = a_n x^{n-1} (n - (n+1)x)$. En particulier le signe de la dérivée ne dépends que du terme $n - (n+1)x$ de sorte que u_n est croissante jusqu'à $\frac{n}{n+1}$ puis décroissante. On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_\infty &= u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&= a_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{a_n}{n+1} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \\
&\sim \frac{a_n}{n+1} e^{-\frac{n}{n+1}} \\
&\sim \frac{a_n}{n} \times \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Ainsi comme les termes $\|u_n\|_\infty$ et $\frac{a_n}{n} \times \frac{1}{e}$ sont équivalents et de même signes on en déduit que les séries sont de même nature, ce qu'il fallait démontrer.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, (a_n) est de limite nulle.

Commençons par le sens indirect, en supposant donc que (a_n) est de limite nulle. On s'intéresse alors au reste de la série $\sum u_n$ pour $x \in [0,1[$ à savoir :

$$\begin{aligned}
0 \leq R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \\
&\leq a_{n+1} (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\
&\leq a_{n+1} (1-x) \frac{x^{n+1}}{1-x} \\
&\leq a_{n+1}
\end{aligned}$$

Comme de plus $R_n(1) = 0$ on peut affirmer que $\|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$, or par hypothèse (a_n) est de limite nulle donc le reste de série converge uniformément vers 0 ce qui assure que la série $\sum u_n$ converge uniformément.

Réciproquement, on raisonne par contraposée en supposant que (a_n) ne converge pas vers 0, comme elle est tout de même positive et décroissante on sait qu'elle converge, notons alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha > 0$. On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \geq \alpha$, montrons alors que la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément. Pour cela on remarque que pour $x \in [0,1[$ on a :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \\ &\geq (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha x^k \\ &\geq (1-x)\, \alpha \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &\geq \alpha x^{n+1} \end{aligned}$$

Comme de plus $R_n(1) = 0$ on peut affirmer que $\alpha x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty$ puis par passage à la limite dans cette inégalité on obtient $0 < \alpha \leq \|R_n\|_\infty$ en particulier le reste de la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément vers 0 donc la série ne converge pas uniformément, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2 - Un contre-exemple (⋆⋆)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$$

1. Justifiez que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

En notant $f_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ on remarque que $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ en majorant le sinus par 1. Or la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est une série convergente car il s'agit d'une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on en déduit alors que la série $\sum f_n$ converge normalement, comme chaque f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$ on peut affirmer qu'il en est de même pour la fonction f.

2. Peut-on appliquer le théorème sur les séries de fonctions $\mathcal{C}^1$?

La réponse est non, car on peut observer que pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est dérivable et que l'on a $f_n'(x) = \cos(2^n x)$. De sorte que pour $x = 2\pi$ on a $f_n(x) = 1$ et donc la série $\sum f_n'$ diverge grossièrement, il n'y a donc aucun espoir de montrer la convergence uniforme de la série des dérivées sur tout segment pour appliquer le théorème.

3. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

Cette question à pour but de bien montrer que c'est la CVU de la série des dérivées qui est essentielle dans le théorème du cours. En effet la série $\sum f_n$ converge le plus fortement du monde (normalement sur $\mathbb{R}$), pourtant la somme f n'est pas dérivable comme on va le montrer en s'intéressant au taux d'accroissement de f en 0. On remarque alors que $f(0) = 0$ de sorte que ce taux d'accroissement est donnée par :

$$\frac{f(x)}{x}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\sin(2^n x)}{2^n x}$$

Pour montrer que ce taux d'accroissement n'admet pas de limite en 0 il suffit de trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que la suite $\frac{f(x_k)}{x_k}$ n'admette pas de limite en $+\infty$. Pour cela on pose $x_k=\frac{\pi}{2^k}$, il s'agit clairement d'une suite de limite nulle et pourtant on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x_k)}{x_k}&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\sin\left(2^n\frac{\pi}{2^k}\right)}{2^n\frac{\pi}{2^k}}\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\sin\left(2^{n-k}\pi\right)}{2^{n-k}\pi}\\&=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\sin\left(2^{n-k}\pi\right)}{2^{n-k}\pi}+\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\sin\left(2^{n-k}\pi\right)}{2^{n-k}\pi}\end{aligned}$$

La deuxième somme ne contient que des termes nulles puisqu'il s'agit de sinus de multiple de π, concernant la première on utilise la minoration classique du sinus sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ à savoir $\sin(x)\geq\frac{2}{\pi}x$ on obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(x_k)}{x_k}&=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{\sin\left(2^{n-k}\pi\right)}{2^{n-k}\pi}+\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\sin\left(2^{n-k}\pi\right)}{2^{n-k}\pi}\\&\geq\sum_{n=0}^{k-1}\frac{2}{\pi}\frac{2^{n-k}\pi}{2^{n-k}\pi}\\&\geq\frac{2k}{\pi}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 3 - Limite en $+\infty$ $(\star\star)$

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$. ON note, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_n:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+&\to&\mathbb{R}\\x&\mapsto&f\left(\frac{nx}{n+1}\right)\end{array}$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x\in\mathbb{R}_+$ comme $\frac{nx}{n+1}\underset{n\to+\infty}{\to}x$ et que f est continue on en déduit que $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}f(x)$ d'où la convergence simple.

Soit $\varepsilon>0$. Par hypothèse f admet un limite finie en $+\infty$ que l'on note $l\in\mathbb{R}_+$, il existe donc $A\in\mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t\in\left[\frac{A}{2},+\infty\right[,\ |f(t)-l|\leq\varepsilon$$

On a de plus : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[A,+\infty[,\ \frac{n}{n+1}x\geq\frac{A}{2}$ et donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[A,+\infty[,\ \left|f\left(\frac{n}{n+1}x\right)-l\right|\leq\varepsilon$. Enfin puisque $A\geq\frac{A}{2}$ on a aussi $\forall x\in[A,+\infty[,\ |f(x)-l|\leq\varepsilon$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[A,+\infty[$:

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)|&\leq|f_n(x)-l|+|f(x)-l|\\&\leq\varepsilon+\varepsilon\\&\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

D'autre part puisque f est continue sur $[0, A]$ d'après le théorème de Heine elle y est uniformément continue. Autrement dit il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, A]$, $|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, A]$ on a $\left|\frac{n}{n+1}x - x\right| = \frac{x}{n+1} \leq \frac{A}{n+1}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ai $\frac{A}{n+1} \leq \delta$. On dès lors :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0, A],\ \left|\frac{n}{n+1}x - x\right| \leq \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

On obtient ainsi $\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ et on en conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 - Convergence $\mathcal{C}^1$? (⋆⋆)

On considère la suite de fonction (f_n) définies par :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \end{array}$$

1. Montrer que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers une fonction que l'on déterminera.

Pour $x \in [-1, 1]$ on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{x^2} = |x|$. Ainsi la suite de fonction (f_n) converge vers la fonction valeur absolue.

2. Justifier que les f_n sont bien de classe $\mathcal{C}^1$. Qu'en est-il de f ? Que peut-on en déduire ?

Pour $n \in \mathbb{N},\ x^2 + \frac{1}{n} \neq 0$ et de plus la fonction racine est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composée de fonction de classe $\mathcal{C}^1$ on en déduit que f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

En revanche $f = |.|$ n'est pas dérivable en 0, en particulier elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

On ne peut rien en déduire sur la suite de fonction (f_n)...

3. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n). Conclusion ?

On cherche à étudier la borne supérieure de la quantité :

$$|f_n(x) - |x|| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right|$$

Pour cela on remarque que la fonction $g_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$ est dérivable sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, et que de plus elle est paire. On étudie donc g_n sur $]0, 1]$ on obtient :

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

On trouve alors le tableau de variation suivant :

x	0	1
$g_n'(x)$	$\|\|$	$-$
g_n	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\searrow$

Par parité on en déduit alors que g_n admet un maximum en 0 et donc $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - |x|| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, d'où la convergence uniforme sur $[-1,1]$

Pour affirmer que la limite f de la suite (f_n) soit de classe $\mathcal{C}^1$ il manque encore comme hypothèse que (f_n') converge simplement vers f'. D'après la question précédente on peut donc affirmer que cette convergence simple n'as pas lieu.

Exercice 5 - Calcul de limite (⋆⋆)

Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x\left(1+x^2\right)}$$

Nous allons essayer d'appliquer le théorème de convergence dominée. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} \end{array}$$

On a alors :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

— La suite (f_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, car $\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 1$.

— L'application f est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

— De plus on sait que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \ln(1+t) \leq t$ d'où $f_n(x) = \frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Or l'application $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi (f_n) satisfait l'hypothèse de domination.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on obitent :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{A\to+\infty}\left[\arctan(x)\right]_0^A \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 6 - Étude du reste (⋆⋆⋆)

On considère la série de fonction $\sum u_n$ avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$.

1. Démontrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Pour $x=0$ on a $u_n(0)=0$ d'où la convergence en 0. Sinon on a :

$$n^2 \times u_n(x) = \frac{x \times n^2 e^{-nx}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

On en déduit alors que $u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, en donc par comparaison et critère de Riemann la série converge simplement.

2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $n \geq 2$ on remarque que u_n est une fonction dérivable et après une étude on trouve qu'elle atteint son maximum en $\frac{1}{n}$. D'où $\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{-1}}{n\ln(n)}$. Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est décroissante et positive pour $x \geq 2$ on en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} &\geq \int_2^N \frac{1}{x\ln(x)}dx + \frac{1}{N\ln(N)} \\ &\geq \Big[\ln(\ln(x))\Big]_2^N + \frac{1}{N\ln(N)} \\ &\geq \ln(\ln(N)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{N\ln(N)}\end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme générale $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge et donc que la convergence n'est pas normale.

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_n(x)$. Démontrer que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)\,(1-e^{-x})}$$

et en déduire que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

On va utiliser la somme d'une série géométrique. En effet pour $x>0$, on a $e^{-kx} = (e^{-x})^k$ or $|e^{-x}| \leq 1$ et de plus pour $k \geq n+1$ on a $0 \leq u_k(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times (e^{-x})^k$ d'où par somme :

$$\begin{aligned}0 \leq R_n(x) &\leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \\ &\leq \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}\end{aligned}$$

De plus on remarque $\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x-1} \leq 1$ par convexité de la fonction exp (i.e $e^x - 1 \geq x$). On aurait aussi pu étudier la fonction pour se rendre compte qu'elle était bornée mais c'est plus long... On a finalement :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Comme on a majoré le reste par une quantité indépendante de x on en déduit que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ d'où le résultat.

Exercice 7 - Avec un paramètre (⋆⋆)

Soit $a \geq 0$. On définit la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^a x^n (1-x)$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$, mais que la convergence est uniforme si et seulement si $a < 1$.

On remarque que l'on a $f_n(1) = 0$ et de plus pour $x \in [0,1[$, par croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles, on sait que $f_n(x)$ tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Pour étudier la convergence uniforme on dérive la fonctin f_n on trouve :

$$f_n'(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}(n(1-x)-x)$$

Ainsi on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\|f_n(x)\| &= \left|f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)\right| \\ &= n^a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{n^a}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\end{aligned}$$

En passant par l'exponentielle et le logarithme on trouve alors que :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to e^{-1}$$

On en déduit que $\|f_n(x)\| \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}n^{a-1}$. Dès lors, (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ si, et seulement si, $a < 1$.

Exercice 8 - Une série de fonction $(\star\star\star)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$$

1. Étudier la convergence de (f_n), puis la limite de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

On distingue trois cas :

- Si $|x| < 1$ alors $x^n \to 0$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Si $|x| = 1$ alors $|f_n(x)| = \frac{1}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- Sinon $|x| > 1$ alors $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2|x|^n}$ et donc $|f_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. De plus on a pour $x \neq 0,\ f_n(x) = \frac{1}{n^2\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)}$ d'où :

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$$

De plus cette majoration étant vérifié pour $x = 0$ on en déduit la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Pour l'intégrale on peut utiliser une interversion, ou une convergence dominée ou encore remarqué que pour $x \in [0,1]\,,\ 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2n^2}$ en intégrant on trouve alors :

$$0 \leq \int_0^1 f_n(t)\,dt \leq \frac{1}{2n^2}$$

Par théorème d'encadrement on trouve $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

2. Déterminer le domaine de définition de $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(x)$.

D'après ce qui précède on a $\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)|\ \frac{1}{2n^2}$ ainsi la série des f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ trouver une relation entre $S(x)$ et $S\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$f_n\left(\frac{1}{x}\right) = f_n(x)$$

Ainsi par passage à la limite on trouve $S\left(\frac{1}{x}\right) = S(x)$.

4. Étudier la continuité de S.

D'après les questions précédentes la série converge normalement, de plus les f_n étant tous continu on ne déuit que S est continue.

5. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

L'équivalent $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x^n}$ associé à la convergence normale permet d'intervertir limite et série, on obtient alors :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$$

Exercice 9 - Étude $(\star\star)$

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ définie pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on va appliquer le théorème des séries alternées. Il est clair que $|u_n(x)|$ tend vers 0 en $+\infty$, il reste à voir si la suite $(u_n(x))$ est bien décroissante. Or :

$$\frac{x}{(n+1)\,(1+x)} \leq \frac{x}{n\,(1+x)}$$

Et on conclut par croissante du logarithme. D'où la convergence simple.

2. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Par le critère des séries alternées on obtient également une majoration du reste à savoir :

$$\begin{aligned}|R_n(x)| &= \left|\sum_{k\geq n+1} u_k(x)\right| \\ &\leq |u_{n+1}(x)| \\ &\leq \left|\ln\left(1+\frac{x}{(n+1)(1+x)}\right)\right| \\ &\leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \\ &\leq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Comme on a majoré le reste pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par une quantité qui tend vers 0 et ne dépends pas de x on en déduit que la convergence est bien uniforme.

3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

On remarque que la série de terme générale $|u_n(1)| = \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ diverge par comparaison de série à terme positif équivalent. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ne peut converger normalement.

Exercice 10 - Étude (⋆⋆)

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$ on pose $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(x+n)}$.

1. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$. On note f sa somme.

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n^{\frac{3}{2}}}$ si $x = 0$, et $f_n(0) = 0$. Ceci prouve la convergence de la série $\sum f_n(x)$.

2. Montrer que la série de terme général f_n est normalement convergente sur $[0, M]$ pour tout $M > 0$. Est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$?

Soit $M > 0$, et $x \in [0, M]$ on a :

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{M}{\sqrt{n}\,(0+n)} = \frac{M}{\sqrt{n}n}$$

Le membre de droite est le terme général d'une série numérique convergente. On a donc prouvé la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, M]$.

La convergence n'est en revanche pas normale sur $\mathbb{R}_+$. En effet on a :

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(n) = \frac{n}{\sqrt{n}\,(n+n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Ainsi la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est divergente.

3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, puis qu'elle est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

D'après la question précédente $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[0, M]$, et donc uniformément convergente sur $[0, M]$. Or pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n$est continue, on peut donc en déduire que la fonction $f = \sum f_n$ est continue sur $[0, M]$, cet intervalle étant quelconque on en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$.

De plus f_n est dérivable et on a $f_n'(x) = \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}$. On doit donc prouver la convergence uniforme de la série $\sum f_n'$ sur $[0, +\infty[$. On a en effet, pour $x \geq 0$:

$$0 \leq f_n'(x) \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Le membre de droite est une série numérique convergente, ainsi $\sum f_n'$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ et donc $f = \sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. De plus on trouve $f' = \sum f_n' \geq 0$, car f_n' est positive. Ainsi f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 11 - Suite de polynôme convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ ($\star\star\star\star$)

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynôme réels qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.

On a d'après l'énoncé $\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en particulier il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ \|P_n - f\|_\infty \leq 1$ soit alors un tel entier $N \geq N$ on a pour $n \geq N$:

$$\|P_n - P_N\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_n\|_\infty \leq 2$$

Ainsi le polynôme $P_n - P_N$ est borné sur $\mathbb{R}$, il est donc constant. Soit alors $c_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n - P_N = c_n$, d'après ce qui précède il s'agit d'une suite bornée et donc quitte à extraire on peut supposer que (c_n) est convergente. Notant alors $c = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ on en déduit alors que $P_n = P_N + c_n$ converge vers $P_N + c$ par unicité de la limite on obtient $f = P_N + c$ ce qui démontre que f est un polynôme.
