Colle n$^{\text{o}}$ 11

Séries de fonctions & produits scalaires

Exercice 1 (La fonction zêta de Riemann est log-convexe)**.**

On rappelle que $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est défini pour tout $x > 1$.

On dit qu'une fonction f est log-convexe si la fonction f est strictement positive et si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $x > 1$, $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$. Montrer que la fonction S_N est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et que
$$[S_N'(x)]^2 \leq S_N''(x) \cdot S_N(x)$$
pour tout $x > 1$.
2. En déduire que $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$ pour tout $x > 1$.
3. Conclure que la fonction ζ est log-convexe.
4. Montrer que, si une fonction est log-convexe, alors elle est convexe.

Exercice 2. Soient E un espace euclidien, u et v deux vecteurs non nuls, et f l'endomorphisme défini par :
$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle v|x \rangle \, u.$$

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, dans laquelle u et v sont représentés par les vecteurs colonnes U et V. Exprimer, grâce à ces vecteurs colonnes :
   - le produit scalaire $\langle u \mid v \rangle$;
   - la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f.
2. Déterminer les noyau et image de f
3. On suppose que u n'est pas orthogonal à v. Montrer que les noyau et image de f sont supplémentaires et que f est diagonalisable. Quel est le spectre de f ?
4. On suppose que u est orthogonal à v. Déterminer $f \circ f$. Les noyau et image de f sont-ils supplémentaires ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?