Colle 11 Produits scalaires

GAUDUCHEAU Salomé

Exercice 1. *(Inégalité de Hadamard)* Soit E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonomée.

1. Alors pour tout
$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, |\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$
Cas d'égalité ?
2. En déduire la majoration suivante pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
$$\sqrt[n]{|\det A|} \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty.$$
3. En revenant à la définition du déterminant, montrer que
$$\sqrt[n]{|\det A|} \leq \sqrt[n]{n!}\|A\|_\infty.$$
4. Comparer ces deux majorations.

Solution **1.**

1. *Si $(x_1,\cdots,x_n)$ est liée, alors l'inégalité s'écrit $0\leq \|x_1\|\cdots\|x_n\|$ qui est vérifiée.*
   Sinon, $(x_1,\cdots,x_n)$ est une base.
   Si elle est orthonormée, alors $|\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_n)|=1$, comme déterminant d'une matrice orthogonal et l'inégalité est encore vérifiée. On en déduit que l'égalité est encore vérifiée si la base est orthogonale.
   Sinon,on utilise le procédé de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base $\mathcal{C}=(x_1,\cdots,x_n)$ en une base $\mathcal{D}=(y_1,\cdots,y_n)$. Par définition, en notant $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, on a
   $$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_n)=\det P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$$
   Mais
   $$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}=P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}P_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$$
   et la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{D}}$ est la matrice de passage d'une base orthonormée vers une base orthonormée et donc son déterminant vaut 1. Enfin la matrice $P_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ est triangulaire supérieure et sa diagonale vaut $\langle x_i,y_i\rangle$. On en déduit que
   $$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\langle x_i,y_i\rangle.$$
   L'inégalité de Cauchy Schwarz montre que
   $$|\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_n)\|\leq\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|\times\|y_i\|=\prod_{i=1}^{n}\|x_i\|$$
   avec égalité ssi pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=\lambda_i y_i$, c'est-à-dire ssi la famille $(x_1,\cdots,x_n)$ est orthogonale.
2. *On sait que $\|x_i\|\leq\sqrt{n}\|x_i\|_\infty\leq\sqrt{n}\|A\|_\infty$ où x_i est le i-ème vecteur colonne de la matrice A. L'inégalité s'en déduit immédiatement.*
3. *On écrit la définition du déterminant comme la somme de $n!$ termes produits de n coefficients de la matrices et donc*
   $$|\det A|\leq n!\|A\|_\infty^n$$
4. *On peut se douter que la majoration 2/ et meilleure que celle du 3/. Pour le prouver, on étudie le quotient des deux à la puissance 2n*
   $$\frac{n^n}{(n!)^2}=\frac{n}{n\times 1}\times\frac{n}{(n-1)\times 2)}\times\cdots\cdots\times\frac{n}{1\times n}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n}{(n-k)(k+1)}.$$
   La fonction $g:x\mapsto(n-x)(x+1)$ atteint son minimum pour $x=\dfrac{n-1}{2}$ et vaut
   $$g(\frac{n-1}{2})=\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{1}{4}(n^2+2n+1).$$
   Enfin, $\dfrac{1}{4}(n^2+2n+1)-n=\dfrac{1}{4}(n-1)^2\geq 0$. On en déduit que le quotient $\dfrac{n}{(n-k)(k+1)}\leq 1$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ et donc $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n!}}\leq 1$, ce qui confirme notre intuition.

LEPAROUX Iban

Exercice 2. Soient $(E, (\ |\ ))$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \geq 1$ et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires sur E.

1. Quelle est la dimension de E^* ?
2. Montrer que si $\varphi \in E^*$, alors il existe un unique vecteur $a \in E$, tel que $\forall x \in E$, $\varphi(x) = (a|x)$.
3. Soit $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ une famille de E^*. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $a_i \in E$ l'unique vecteur a_i tel que $\phi_i(x) = (a_i|x)$ et soit $f : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (\phi_1(x), \cdots, \phi_n(x))$.
   (a) Montrer que $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ est une base de E ssi $(a_1, \cdots, a_n)$ est une base de E.
   (b) Si $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que :
   $$\forall (i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2,\ \phi_i(e_j) = \delta_{i,j}.$$
4. Si ϕ_1 , $\phi_2 \in E^*$, on définit l'application $\phi_1 \wedge \phi_2 : (x, y) \mapsto \phi_1(x)\phi_2(y) - \phi_1(y)\phi_2(x)$. Montrer que $\phi_1 \wedge \phi_2$ est une forme bilinéaire antisymétrique.
5. Si $(\phi_1, \cdots, \phi_p)$ est une famille libre de E^*, montrer que la famille $(\phi_i \wedge \phi_j)_{1 \leq i < j \leq p}$ est libre.

Solution **2.** 1. *La dimension de* $E^* = n$ *(cours)*

2. *On l'a montré en cours. Une autre preuve : l'application* $f : E \to E^*$, $a \mapsto \big(x \mapsto (a|x)\big)$ *est une application linéaire. De plus,* $a \ker f$ *ssi pour tout* $x \in E$, $a|x) = 0$ *et donc* $(a|a) = 0$. *On en déduit que* $a = 0$, $\ker f = \{0\}$ *et* f *est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension, elle est bijective.*

3. (a) *Pour tous* λ_1, ...,$\lambda_n \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $x \in E$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i|\phi(x)) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i|x)$$

On en déduit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i = 0$ *ssi* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$. *Donc la famille* $(\phi_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ *est libre ssi* $(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ *est libre. Comme les espaces sont de dimension n ; on en déduit le résultat.*

(b) *Si* $(\phi_1, \cdots, \phi_n)$ *est une base, alors* $f(x) = 0$ *ssi pour tout* i $\phi_i(x) = (a_i|x) = 0$, *et comme* $(a_1, \cdots, a_n)$ *est une base, on en déduit que* $x \in E^\perp = \{0\}$. *L'application* f *est injective, donc biejctive car entre deux spaces de mêm dimension. Soit* $(g_1, \cdots, g_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$, *alors* $e_i = f^{-1}(g_i)$ *vérifie* $\phi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ *et comme l'image réciproque d'une base par un isomorphisme est une base, on sait que* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est bien une base de* E.

4. *On a* $\phi_1 \wedge \phi_2(x) = -\phi_2 \wedge \phi_1$ *et l'application est clairement linéaire en* x, *donc elle est bilinéaire antisymétrique.*

5. *On complète* $(\phi_1, \cdots, \phi_p)$ *en une base de* E^* *et soit la base* $(e_1, \cdots, e_n)$ *trouvée à la question précédente. Alors* $(\varphi_i \wedge \varphi_j)(e_k, e_l) = \delta_{i,k}\delta_{i,l} - \delta_{i,l}\delta_{j,k}$.
On en déduit que pour tout $1 \leq k < l \leq n$, *on a*

$$\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} \phi_i \wedge \phi_j\right)(e_k, e_l) = \lambda_{k,l}$$

et donc la somme $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{i,j} \phi_i \wedge \phi_j = 0$ *ssi pour tout* $i < j$, $\lambda_{i,j} = 0$ *et la famille est libre. On en déduit que la sous-famille pour* $1 \leq i < j \leq p$ *est libre.*

ROUSSEAU Loane

Exercice 3. Soit L une forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$. On dit qu'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}[X]$ est orthogonale par rapport à L si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n,\ \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ m \neq n \Rightarrow L(P_m P_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ L(P_n^2) \neq 0.$$

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale par rapport à L.
   i) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $L(P_n P) = 0$.
   ii) Soit $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que pour tout $S \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à deg R, $L(RS) = 0$. Montrer que $R = 0$.
   iii) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes unitaires orthogonale relativement à L.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mu_k = L(X^k)$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}$. On suppose qu'il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale pour L.
   i) Montrer que $\Delta_n \neq 0$.
   ii) Établir la réciproque et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de P_n est égal à $L(X^n P_n)\Delta_{n-1}/\Delta_n$.

Solution **3.** $(P,Q) \mapsto L(P,Q)$ *est une forme bilinéaire symétrique. On dira que P et Q sont orthogonaux si $L(PQ)=0$.*

1. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (P_0, P_n) est échelonnée en degré et donc est une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Comme par hypothèse, P_n est orthogonale à une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, on en déduit que P_n est orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n-1$.*

   (b) *Si R de degré $d \geq$, R s'écrit $\sum_{i=O}^{d} \alpha_i P_i$. Mais alors $L(RP_d)=0$, et donc $\alpha_d = 0$, ce qui contredit R de degré $d \geq 0$. Donc $R=0$.*

   (c) *Quitte à diviser P_n par son coeffcient dominant, on peut supposer la suite (P_n) unitaire orthogonale. S'il en existe une seconde, alors $(P_n - Q_n)$ est encore orthogonale à $\mathbb{C}_n[X]$ et est de degré $n-1$, ce qui montre que $P_n = Q_n$.*

2. *On remarque que la matrice proposée s'écrit $A_n = \big(L(X^iX^j)\big)_{0\leq i,j\leq n}$, c'est-à-dire est la matrice dans la base canonique L restreinte à $\mathbb{R}_n[X]^2$:*

$$L(P,Q) = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T A_n \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

   avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$.
   Si le noyau de A était non nulle, on obtiendrait un polynôme orthogonal à tous les autres, mais on a montré que seul le polynôme nul convient, donc on a obtenu l'existence.
   Réciproquement, si le déterminant est non nul, alors alors la matrice est diagonalisable dans une base orthonormée et si P est la matrice de passage, alors les vecteurs colonnes de P donnent la famille orthogonale jusqu'au rang n.

Exercice 4. Sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ on définit le produit scalaire

$$\forall f, g \in E,\ < f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$$

1. Montrer qu'il existe une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n \text{ et } \forall m, n \in \mathbb{N}, < P_m, P_n >= \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On fixe n dans $\mathbb{N}$. Montrer que le polynôme P_n admet exactement n racines distinctes dans l'intervalles $]0,1[$ que l'on énumère : $\omega_1, \dots, \omega_n$.
3. On pose, pour tout $f \in E$,

$$E(f) = \int_0^1 f(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\omega_k)$$

   avec les λ_k réels à déterminer. Montrer qu'il est possible de choisir les λ_k de manière à ce que, pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n, on ait $E(P) = 0$.
   Hint : on pourra utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange appliqués au système de racines.
4. Pour les λ_k choisis ci-dessus, montrer que l'on a en fait $E(P) = 0$ pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à $2n$. On pourra faire une division euclidienne de P par P_n.
5. Que se passe-t-il si P est de degré $2n$?

Solution **4.**

1. *Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique* $(1, X, \cdots, X^n)$ *de* $\mathbb{R}_n[X]$ *nous donne l'existence d'une famille* $(P_0, \cdots, P_n)$ *telle que pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k \in \mathrm{Vect}(1, \cdots, X^k)$. *Ce qui est exactement ce que l'on nous demandait.*
2. *On en déduit que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$, $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}$.
   Supposons que P_n *possède r racines de multiplicité impaires* α_1, ...,$\alpha_r \in]0, 1[$. *Alors* $\displaystyle\int_0^1 P_k(t) \prod_{i=1}^{r} (t - \alpha_i)\, dt =< P_k, \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i) = 0$ *si* $r < k$. *Mais par construction* $P_k \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)$ *est de signe constant.* *Ce qui est absurde, car* $P_k \neq 0$. *Donc* $r = k$ *et* P_k *est simplent scindé dans* $]-1, 1[$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$.
3. *Soit* L_i *le i-ème polynôme interpolateur de Lagrange associè à* $(w_1, \cdots, w_n)$. *Alors tout olynôme* P *de degré strictement inférieur à* n *s'écrit dans la base* L_i :

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(w_i) L_i$$

   et donc si $\lambda_k = \displaystyle\int_0^1 L_k(t)\, dt$, *on obtient la formule attendue.*
4. *Si* $\deg P < 2n$, *alors on fait la division de* P *par* P_n : $P = Q_n P_n + R_n$, *avec* $deq R_n < n$.
   On en déduit que $< P, 1 >=< P_n, Q_n > + < R_n, 1 >= \displaystyle\int_0^1 R_n(t)\, dt$.
   De plus, $R_(w_i) = P(w_i)$ *e donc*

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\omega_k).$$

   Si $\deg p = 2n$, *on reprend la division euclideinne* $P = Q_n P_n + R_n$. *Si* α_n *est le coefficient dominant de* P_n *et si* a_{2n} *est le coefficient dominant de* P, *alors*

$$Q_n = \frac{a_{2n}}{\alpha_n} P_n + \textit{terme de degré} < n$$

   et donc $< Q_n, P_n >= \dfrac{a_{2n}}{\alpha_n} \|P_n\|^2$.
   Ainsi,

$$\int_0^1 P(t)\, dt = \frac{a_{2n}}{\alpha_n} \|P_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(\omega_k).$$