KDO DU 13/12/2024

Exercice 1 (tiré de CCINP 2024 MPI Math 2)**.**

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, où $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, et on note f sa somme.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D =]0, +\infty[$.
2. Démontrer que f est continue sur D.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Soit $x \in D$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\, dt$ est convergente et la calculer.
5. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Exercice 2 (tiré de Centrale-Supélec 2023 MP-MPI Math 2)**.**

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$J_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt \quad \text{et} \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt.$$

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ est convergente.
2. Justifier l'existence de K_n et montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\, \mathrm{d}t = \underset{n\to\infty}{O}\left(\frac{1}{n2^n}\right)$.
3. Montrer que $J_n \geqslant \frac{1}{2^n}$ et en déduire que $J_n \underset{n\to\infty}{\sim} K_n$
4. Établir la relation de récurrence $K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n$.
5. En déduire un équivalent de K_n lorsque n tend vers ∞.
6. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, J_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, du$.
7. En déduire que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.