Corrigé de la colle n° 11

Séries de fonctions & produits scalaires

12 décembre 2024

Exercice 1 (La fonction zêta de Riemann est log-convexe)**.**

On rappelle que $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est défini pour tout $x > 1$.

On dit qu'une fonction f est log-convexe si la fonction f est strictement positive et si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $x > 1$, $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$. Montrer que la fonction S_N est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et que
$$[S_N'(x)]^2 \leq S_N''(x) \cdot S_N(x)$$
pour tout $x > 1$.
2. En déduire que $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$ pour tout $x > 1$.
3. Conclure que la fonction ζ est log-convexe.
4. Montrer que, si une fonction est log-convexe, alors elle est convexe.

---

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 1$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = \mathrm{e}^{-x \ln n}$. Chaque fonction f_n est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et, pour tout $x > 1$, $f_n'(x) = \dfrac{-\ln n}{n^x}$ et $f_n''(x) = \dfrac{(\ln n)^2}{n^x}$. Par suite, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la fonction S_N est deux fois dérivable et $\left[S_N'(x)\right]^2 = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{-\ln n}{n^x}\right)^2 = \langle u, v\rangle^2$, où $\langle u, v\rangle$ est le produit scalaire usuel des deux vecteurs $u = \left(\dfrac{\ln 1}{1^{x/2}}, \cdots, \dfrac{\ln N}{N^{x/2}}\right)$ et $v \left(\dfrac{1}{1^{x/2}}, \cdots, \dfrac{1}{N^{x/2}}\right)$ de $\mathbb{R}^N$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$. Or $\|u\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{(\ln n)^2}{\left(n^{x/2}\right)^2} = S_N''(x)$ et $\|v\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1^2}{\left(n^{x/2}\right)^2} = S_N(x)$. Donc $\left[S_N'(x)\right]^2 \leq S_N''(x) \cdot S_N(x)$ pour tout $x > 1$.

2. On a prouvé que $\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n'(x)\right]^2 \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n''(x) \cdot \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Il reste à prouver que :
   — les limites $\displaystyle\lim_{N \to \infty} S_N(x)$, $\displaystyle\lim_{N \to \infty} S_N'(x)$ et $\displaystyle\lim_{N \to \infty} S_N''(x)$ existent, cela permettra d'écrire
   $$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\right]^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) \cdot \zeta(x)$$
   car les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$;
   — on peut dériver terme à terme, cela permettra d'écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \zeta'(x)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = \zeta''(x)$.

   Pour ce faire, on utilise le ▷ **corollaire 19 du chapitre VII**. Soient $a > 1$ et $\epsilon > 0$ tel que $a - \varepsilon > 1$:
   * Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$.

$**$ Les séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum f_n'$ convergent simplement sur $[a, +\infty[$ car, pour tout $x > a$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^a}$ et la série numérique $\sum \dfrac{1}{n^a}$ converge d'après la critère de Riemann. Et $\left|f_n'(x)\right| \leq \dfrac{\ln n}{n^a} \leq \dfrac{\ln n}{n^\varepsilon}\dfrac{1}{n^{a-\varepsilon}} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{a-\varepsilon}}\right)$, la suite $\dfrac{1}{n^{a-\varepsilon}}$ ne change pas de signe et la série numérique $\sum \dfrac{1}{n^{a-\varepsilon}}$ converge.

$***$ La série de fonctions $\sum f_n''$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, +\infty[$ car $\left|f_n''(x)\right| \leq \dfrac{(\ln n)^2}{n^x} \leq \dfrac{(\ln n)^2}{n^\varepsilon}\dfrac{1}{n^{a-\varepsilon}} = \underset{n\to\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^{a-\varepsilon}}\right)$.

Donc la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$ et on peut dériver terme à terme. C'est vrai pour tout $a > 1$, donc sur $]1, +\infty[$. En conclusion, $[\zeta'(x)]^2 \leq \zeta''(x) \cdot \zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

3. D'une part, la fonction ζ est strictement positive car $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \geq 1$ pour tout $x > 1$. D'autre part, la fonction $\ln \circ \zeta$ est convexe car elle est deux fois dérivable (par composition) et sa dérivée seconde est positive. En effet, $\dfrac{d}{dx}\ln \circ \zeta(x) = \dfrac{\zeta'(x)}{\zeta(x)}$, d'où $\dfrac{d^2}{dx^2}\ln \circ \zeta(x) = \frac{\zeta''(x)\zeta(x) - \zeta'(x)\zeta'(x)}{\zeta^2(x)} \geq 0$ pour tout $x > 1$, d'après la question précédente.
4. On suppose que la fonction f est log-convexe. Soient x et y deux réels appartenant à l'ensemble de définition de la fonction f. Soit $\lambda \in [0, 1]$. On veut montrer que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$:
   $\ln f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y)$ car f est log-convexe.
   D'où $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \exp[\lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y)]$ par croissance de la fonction exp.
   Enfin, la fonction exp est convexe, d'où $\exp[\lambda \ln f(x) + (1-\lambda)\ln f(y)] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
   D'où $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
   Donc la fonction f est convexe.

Exercice 2. Soient E un espace euclidien, u et v deux vecteurs non nuls, et f l'endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle v|x \rangle\, u.$$

1. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E, dans laquelle u et v sont représentés par les vecteurs colonnes U et V. Exprimer, grâce à ces vecteurs colonnes :
   — le produit scalaire $\langle u \mid v \rangle$;
   — la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f.
2. Déterminer les noyau et image de f
3. On suppose que u n'est pas orthogonal à v. Montrer que les noyau et image de f sont supplémentaires et que f est diagonalisable. Quel est le spectre de f ?
4. On suppose que u est orthogonal à v. Déterminer $f \circ f$. Les noyau et image de f sont-ils supplémentaires ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

---

1. Notons la base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$:
$$\begin{array}{rcl} \langle u|v \rangle & = & \langle \sum_{i=1}^n u_i e_i | \sum_{j=1}^n v_j e_j \rangle \\ & = & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle e_i|e_j \rangle \\ & = & \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ & = & {}^tUV. \end{array}$$
   Par suite, pour tout $x \in E$:
$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & ({}^tV \cdot X) \cdot U & \\ & = & U \cdot ({}^tV \cdot X) & \text{car } {}^tV \cdot X \text{ est une matrice } 1 \times 1 \text{ et commute donc avec } U \\ & = & (U \cdot {}^tV) \cdot X & \text{car la multiplication matricielle est associative.} \end{array}$$
   La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donc la matrice carrée $U \cdot^t V$.
2. Pour tout $x \in E$, $f(x) = \langle v|x \rangle u$ est colinéaire au vecteur u. Donc l'image de f est incluse dans $\mathrm{Vect}(u)$ et est donc égale à $\{0_E\}$ ou à $\mathrm{Vect}(u)$. Or $f(v) = \langle v|v \rangle u$ est non nul, donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(u)$.
   Si $x \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $\langle v|x \rangle u = 0_E$. Or $u \neq 0_E$, d'où $\langle v|x \rangle = 0$, donc $\mathrm{Ker}\, f \subset (\mathrm{Vect}(v))^\perp$. Réciproquement, si x appartient à $(\mathrm{Vect}(v))^\perp$, alors $f(x) = 0_E$. Donc $(\mathrm{Vect}(v))^\perp = \mathrm{Ker}\, f$.

3. Si u n'est pas orthogonal à v, alors u n'appartient pas au noyau de f, d'où $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et, comme $\dim E = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f$ (théorème du rang), noyau et image sont supplémentaires.

   Le noyau de f est le *sep* associé à la valeur propre 0. En outre, u est un vecteur propre associé à la valeur propre $\langle v|u\rangle$ car $f(u) = \langle v|u\rangle u$ et $u \neq 0_E$. D'où une base adpatée à la somme directe $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E$ sera une base de E formée de vecteurs propres de f. Donc f est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(f) = \{\langle v|u\rangle; 0\}$.

4. Si u est orthogonal à v, alors
$$f \circ f(x) = u\langle v|u\langle v|x\rangle\rangle = u\langle v|u\rangle\langle v|x\rangle = 0$$
   pour tout $x \in E$, donc $f \circ f = 0$. Noyau et image ne sont pas supplémentaires car u appartient à leur intersection.

   En outre, la seule valeur propre possible de f est 0 car 0 est la seule racine du polynôme X^2, annulateur de f. Si f était diagonalisable, alors ce serait l'endomorphisme nul. Or $f(v) = u\langle v|v\rangle \neq 0_E$. Donc f n'est pas diagonalisable.