Corrigé du D.M. n° 6 de mathématiques

13 décembre 2024

Partie A - les polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par

$$T_0 = 1 \quad , \quad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le degré du polynôme T_n est n et le coefficient du terme dominant de T_n est 2^{n-1}.
2. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
3. Soit $n \geq 2$. On pose, pour chaque entier naturel k,
$$a_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right).$$
Montrer que les réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux. Déterminer les racines du polynôme T_n.

Partie B - vecteurs propres

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par

$$\varphi(P) = XP' - (1 - X^2)P''$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

4. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \operatorname{Arccos}(x))$.
6. En déduire que, pour tout $x \in]-1, +1[$,
$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \qquad (\mathcal{E}_n)$$
7. Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n)$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. En déduire que T_n est un vecteur propre de φ.
9. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Est-il bijectif ?

Partie C - un produit scalaire

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

10. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est convergente.
11. En déduire, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, la convergence de l'intégrale $\langle P \mid Q\rangle$.
12. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
13. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

    Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(n\theta)\,d\theta$ et en déduire $\|T_n\|$.
14. Montrer que, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$. En déduire que $\langle \varphi(P) \mid Q\rangle = \langle \varphi(Q) \mid P\rangle$ pour tous polynômes P et Q.
15. Montrer que $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie D - une méthode de quadrature

Soit $n \geq 2$. On cherche $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P(a_k) \qquad (*)$$

où les réels a_k ont été définis à la question 3.

16. Pour chaque $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note b_k le réel $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ qu'on ne cherchera pas à calculer.

    Montrer qu'une $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifie la propriété $(*)$ si, et seulement si,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-2}^2 & a_{n-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

17. Rappeler le déterminant de la matrice carrée apparue dans la question précédente. En déduire qu'il existe une unique $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifiant la propriété $(*)$.
18. En effectuant une division euclidienne par le polynôme T_n, montrer que la propriété $(*)$ est vraie pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Partie E - une autre expression des polynômes de Tchebychev

19. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta).$$

20. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \geq 1$,

$$T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$

Partie A - les polynômes de Tchebychev

1. Par récurrence, on prouve, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété P_n : « le polynôme T_n a pour degré n et le coefficient de son terme dominant est 2^{n-1} ».
   La propriété P_1 est vraie car $T_1 = X$ a pour degré 1 et le coefficient de son terme dominant est 2^0. Et P_2 est vraie car $T_2 = 2X^2 - 1$ a pour degré 2 et le coefficient de son terme dominant est 2^1.
   Si P_n et P_{n+1} sont vraies, alors P_{n+2} est vraie car $T_{n+2} = 2X \cdot (2^n X^{n+1} + \cdots) - (2^{n-1} X^n + \cdots)$ a pour degré $n+2$ et le coefficient de son terme dominant est 2^{n+1}.
   Donc P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Par récurrence, on prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 car $T_0(\cos\theta) = 1 = \cos(0\theta)$ et $T_1(\cos\theta) = \cos\theta = \cos(1\theta)$.
   Si la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$ car $T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n+1)\theta - \cos n\theta$. Or $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ pour tous réels a et b, et en particulier pour $a = (n+1)\theta$ et $b = \theta$. D'où $T_{n+2}(\cos\theta) = \cos(n+2)\theta$.
   La propriété est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \geq 2$. Pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, $\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$ appartient à l'intervalle $[0, \pi]$. Or la fonction cos est strictement décroissante sur cet intervalle, donc elle y est injective. Par suite les n réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux. D'après la question 2, ce sont des racines de T_n car $T_n(a_k) = \cos\left[n \cdot (\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n})\right] = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Partie B - vecteurs propres

4. D'une part, φ est linéaire car, pour tous α, β dans $\mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= X(\alpha P' + \beta Q') - (1 - X^2)(\alpha P'' + \beta Q'') \\ &= \alpha\left[XP' - (1 - X^2)P''\right] + \beta\left[XQ' - (1 - X^2)Q''\right] \\ &= \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q). \end{aligned}$$

   D'autre part, pour chaque $k \geq 2$, $\varphi(X^k) = XkX^{k-1} - (1 - X^2)k(k-1)X^{k-2} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$. De plus $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(X) = X$. Par suite, $\forall k \leq n,\ \varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. D'où $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.
   Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. Soit $x \in [-1, +1]$: posons $\theta = \operatorname{Arccos}(x)$. Alors $\cos\theta = x$ et, d'après la question 2,

$$T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) = \cos(n \cdot \operatorname{Arccos}(x)).$$

6. La fonction Arccos est dérivable sur $]-1, +1[$ et, pour tout $x \in]-1, +1[$, $\operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   D'où $T_n'(x) = \dfrac{d}{dx}\cos(n \cdot \operatorname{Arccos}(x)) = -\sin(n \cdot \operatorname{Arccos}(x))\dfrac{-n}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\begin{aligned} T_n''(x) &= \frac{d}{dx}\sin(n \cdot \operatorname{Arccos}(x)) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} + \sin(n \cdot \operatorname{Arccos}(x)) \cdot \frac{d}{dx}\frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\cos(n \cdot \operatorname{Arccos}(x)) \cdot \frac{n^2}{1-x^2} + \sin(n \cdot \operatorname{Arccos}(x)) \cdot \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}^3} \end{aligned}$$

   On en déduit que, pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \qquad (\mathcal{E}_n)$$

7. De la question précédente, il résulte que tous les réels de $]-1, +1[$ sont des racines du polynôme $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n$. Ce polynôme est donc nul car il possède une infinité de racines. Donc l'équation $(\mathcal{E}_n)$ est vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
8. On vient de montrer que $(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0$. D'où $XT_n' - (1 - X^2)T_n'' = n^2T_n$, autrement dit : $\varphi(T_n) = n^2T_n$. Le polynôme T_n n'étant pas nul, c'est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre n^2.
9. Le spectre de φ est $\left\{k^2, k \in [\![0, n]\!]\right\}$. Son cardinal est $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc
   $\boxed{\text{l'endomorphisme } \varphi \text{ est diagonalisable}}$. De plus $0 \in \operatorname{Sp}(\varphi)$, donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas bijectif}}$.

Partie C - un produit scalaire

10. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ est convergente si, et seulement si, les deux intégrales $\displaystyle\int_{0}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ le sont.
    PREMIÈRE MÉTHODE. Soit $a \in [0,1[$: $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\mathrm{Arcsin}(x)]_0^a = \mathrm{Arcsin}(a) \underset{a\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$. D'où la première intégrale est convergente et, de même, la deuxième.
    DEUXIÈME MÉTHODE : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Or $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ converge d'après le critère de Riemann en 0 (avec $\alpha = \frac{1}{2}$). D'où la première intégrale est convergente et, de même, la deuxième.
11. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)$ est continue sur le segment $[-1,+1]$, elle y est donc bornée. Par suite, il existe un réel M tel que : $\forall x \in [-1,+1],\ [P(x)Q(x)| \leq M$. D'où $\displaystyle\left|\frac{P(xQ(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| \leq M \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1,+1[$. D'après la question précédente, l'intégrale $\langle P \mid Q\rangle$ est donc absolument convergente.
12. On veut montrer que la forme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bilinéaire, symétrique, définie positive :

    $\boxed{\text{S}}$ $\langle P \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{Q(x)P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \langle Q \mid P\rangle$

    $\boxed{\text{B}}$ $\langle \alpha P + \beta Q | R\rangle = \alpha\langle P|R\rangle + \beta\langle Q|R\rangle$ par linéarité de l'intégrale. D'où la linéarité à gauche de $\langle\cdot|\cdot\rangle$ et la bilinéarité par symétrie.

    $\boxed{\text{P}}$ $\langle P|P\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive.

    $\boxed{\text{D}}$ Supposons que $\langle P|P\rangle = 0$. Alors $\int_{-1}^{+1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0$. Or la fonction $x \mapsto \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est positive et continue, d'où $\forall x \in]-1,+1[, P(x) = 0$. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui prouve que $P = 0$.
13. On linéarise : si $n \neq 0$, alors $\cos^2(n\theta) = \dfrac{1+\cos(2n\theta)}{2}$, d'où $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{2n}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$. Et , si $n = 0$, alors $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2(n\theta)\,d\theta = \int_0^\pi 1\,d\theta = \pi$.
    Or $\|T_n\| = \sqrt{\langle T_n|T_n\rangle}$ et $\displaystyle\langle T_n|T_n\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Changeons de variable : $x = \cos\theta$. La fonction $\theta \mapsto \cos\theta$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $]0,\pi[$, $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_\pi^0 \frac{T_n^2(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \cos^2(n\theta)\,d\theta$ car $\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\sin^2\theta} = |\sin\theta| = \sin\theta$ pour tout $\theta \in]0,\pi[$.
    Donc $\|T_n\| = \sqrt{\pi/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.
14. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$:
    $$\langle\varphi(P) \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} \left[xP'(x) - (1-x^2)P''(x)\right] Q(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} u'(x)v(x)\,dx,$$
    où les deux fonctions $u : x \mapsto -P'(x)\sqrt{1-x^2}$ et $v : x \mapsto Q(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+1[$ et ont des limites finies en -1 et en $+1$. D'où, en intégrant par parties :
    $$\langle\varphi(P) \mid Q\rangle = [u(x)v(x)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} u(x)v'(x)\,dx = 0 + \int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$
    On a montré que, pour tous P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\langle\varphi(P) \mid Q\rangle = \int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$. Par suite $\langle\varphi(Q) \mid P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{+1} Q'(x)P'(x)\sqrt{1-x^2}\,dx$ est égal à $\langle\varphi(P) \mid Q\rangle$.
15. Si $m \neq n$, alors les polynômes T_m et T_n sont des vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres distinctes m^2 et n^2 d'après la question 8. Or les réels $\langle\varphi(T_m) \mid T_n\rangle = m^2\langle T_m \mid T_n\rangle$ et $\langle\varphi(T_n) \mid T_m\rangle = n^2\langle T_n \mid T_m\rangle$ sont égaux d'après la question précédente. D'où le réel $\langle T_n \mid T_m\rangle$ est nul, donc $T_m \perp T_n$.
    La famille de $n+1$ vecteurs $(T_0, T_1, \cdots, T_n)$ est orthogonale, aucun de ses vecteurs n'est nul, elle est donc libre et c'est une base car $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

Partie D - une méthode de quadrature

16. Les deux applications $f : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ et $g : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j P(a_j)$ sont linéaires.

D'où :

$$\begin{aligned}
\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ g(P) = f(P) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ g(X^i) = f(X^i) \text{ car } (1, \cdots, X^{n-1}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j a_j^i = b_i \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-2}^2 & a_{n-1}^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-2}^{n-1} & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

17. Le déterminant de la matrice carrée est un déterminant de Vandermonde, égal à $\displaystyle\prod_{0 \le i < j \le n-1} (a_j - a_i)$. Il est non nul car les n réels $a_0, \cdots, a_{n-1}$ sont distincts deux à deux d'après la question 3. D'où la matrice carrée est inversible. Il existe donc une unique $n-$liste $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1})$ vérifiant la propriété $(*)$.

18. Soit $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$: la division euclidienne de P par T_n donne : $P = T_n Q + R$ et $\deg R < n$. D'où $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_{-1}^{+1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \langle T_n | Q \rangle + \int_{-1}^{+1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$
Or le quotient Q est de degré inférieur à $n-1$ car $\deg T_n = n$ d'après la question 1. D'où $T_n \perp Q$ d'après la question 15.
Par suite $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j R(a_j)$ grâce à la propriété $(*)$ qui vaut pour le polynôme R car celui-ci est de degré strictement inférieur à n.
Enfin $R(a_i) = T_n(a_i)Q(a_i) + R(a_i) = P(a_i)$ pour chaque $i \in [\![0, n-1]\!]$ car les n réels $(a_0, \cdots, a_{n-1})$ sont des racines du polynôme T_n d'après la question 3.
Donc la propriété $(*)$ est vraie pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

Partie E - une autre expression des polynômes de Tchebychev

19. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par récurrence, on prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n\theta)$.
La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 car $T_0(\operatorname{ch}\theta) = 1 = \operatorname{ch}(0\theta)$ et $T_1(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}\theta = \operatorname{ch}(1\theta)$.
Si la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$ car $T_{n+2}(\operatorname{ch}\theta) = 2\operatorname{ch}\theta T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) - T_n(\operatorname{ch}\theta) = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}(n+1)\theta - \operatorname{ch} n\theta$. Or $\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b) = 2\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$ pour tous réels a et b, et en particulier pour $a = (n+1)\theta$ et $b = \theta$. D'où $T_{n+2}(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n+2)\theta$.
La propriété est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

20. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \ge 1$: il existe un réel $\theta \ge 0$ tel que $\operatorname{ch}\theta = x$, d'où $T_n(x) = \operatorname{ch}(n\theta) = \frac{e^{n\theta} + e^{-n\theta}}{2} = \frac{\left(e^{\theta}\right)^n + \left(e^{-\theta}\right)^n}{2} = \frac{(\operatorname{ch}\theta + \operatorname{sh}\theta)^n + (\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta)^n}{2}$. De plus, $\operatorname{sh}\theta = \sqrt{\operatorname{ch}^2\theta - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel $x \ge 1$,

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n}{2}.$$