PROGRAMME DE LA COLLE N° 12

Semaine du 16/12/2024

- Tous les chapitres précédents : **séries numériques, algèbre linéaire, intégrales généralisées, diagonalisation, suites de fonctions, probabilités, séries de fonctions**

- et le dernier chapitre **Produits scalaires** :
  - produits scalaires et norme associée sur un $\mathbb{R}-ev\ E$ de dimension infinie ou finie, notamment les produits scalaires canoniques sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}([a,b])$ et $L_2(I)\cap\mathcal{C}(I)$;
  - égalités de polarisation et du parallélogramme, inégalités de Cauchy-Schwarz (et CNS d'égalité) et triangulaire ;
  - orthogonalité de deux vecteurs, d'un vecteur et d'une partie, de deux parties ; théorème de Pythagore (CNS dans le cas de 2 vecteurs, CN dans le cas de $n>2$ vecteurs) ;
  - orthogonal d'une partie A, $A\perp B \iff A\subset B^\perp \iff B\subset A^\perp$, $A\subset (A^\perp)^\perp$, $A^\perp$ est un *sev*, A *sev* $\implies A\cap A^\perp=\{0_E\}$;
  - liberté d'une famille de vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux ;
  - familles et bases orthonormées, algorithme de Gram-Schmidt ; dans une *b.o.n*, expression du produit scalaire de deux vecteurs et de la matrice d'un endomorphisme ;
  - existence, unicité et formule de la projection orthogonale d'un espace préhilbertien E sur un *sev* F de dimension finie ;
  - théorème des moindres carrés, distance $d(x,F)$ d'un vecteur $x\in E$ à un *sev* F de dimension finie ;
  - le *sev* F est de dimension finie $\implies F\oplus F^\perp=E \implies F=(F^\perp)^\perp$;
  - l'orthogonal d'une droite est un hyperplan ;
  - en dimension finie, l'orthogonal d'un hyperplan est une droite, théorème de représentation de Riesz, distance d'un vecteur à un hyperplan ou à une droite.

À suivre : séries entières