Exercice 1 - Série de fonction $(\star\star\star)$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positive et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$ où $x \in [0,1]$.

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

On remarque dans un premier temps que pour $x = 0$ et $x = 1$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = 0$. De plus, pour $x \in]0,1[$ on a :

$$0 \leq u_n(x) = a_n x^n (1-x) \leq a_0 x^n$$

Or la série de terme général $a_0 x^n$ est convergent car il s'agit d'une série géométrique de raison $0 < x < 1$. On en déduit qu'il en est de même pour la série de terme $u_n(x)$ d'où la convergence simple.

2. Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

Pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction u_n est dérivable sur $]0,1[$ et de plus on trouve après simplification $u_n'(x) = a_n x^{n-1} (n - (n+1)x)$. En particulier le signe de la dérivée ne dépends que du terme $n - (n+1)x$ de sorte que u_n est croissante jusqu'à $\frac{n}{n+1}$ puis décroissante. On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_\infty &= u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\
&= a_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{a_n}{n+1} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \\
&\sim \frac{a_n}{n+1} e^{-\frac{n}{n+1}} \\
&\sim \frac{a_n}{n} \times \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Ainsi comme les termes $\|u_n\|_\infty$ et $\frac{a_n}{n} \times \frac{1}{e}$ sont équivalents et de même signes on en déduit que les séries sont de même nature, ce qu'il fallait démontrer.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, (a_n) est de limite nulle.

Commençons par le sens indirect, en supposant donc que (a_n) est de limite nulle. On s'intéresse alors au reste de la série $\sum u_n$ pour $x \in [0,1[$ à savoir :

$$\begin{aligned}
0 \leq R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \\
&\leq a_{n+1} (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k \\
&\leq a_{n+1} (1-x) \frac{x^{n+1}}{1-x} \\
&\leq a_{n+1}
\end{aligned}$$

Comme de plus $R_n(1) = 0$ on peut affirmer que $\|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$, or par hypothèse (a_n) est de limite nulle donc le reste de série converge uniformément vers 0 ce qui assure que la série $\sum u_n$ converge uniformément.

Réciproquement, on raisonne par contraposée en supposant que (a_n) ne converge pas vers 0, comme elle est tout de même positive et décroissante on sait qu'elle converge, notons alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha > 0$. On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \geq \alpha$, montrons alors que la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément. Pour cela on remarque que pour $x \in [0, 1[$ on a :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x) \\ &\geq (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha x^k \\ &\geq (1-x)\, \alpha \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &\geq \alpha x^{n+1} \end{aligned}$$

Comme de plus $R_n(1) = 0$ on peut affirmer que $\alpha x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty$ puis par passage à la limite dans cette inégalité on obtient $0 < \alpha \leq \|R_n\|_\infty$ en particulier le reste de la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément vers 0 donc la série ne converge pas uniformément, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2 - Limite en $+\infty$ $(\star\star)$

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie en $+\infty$. ON note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(\frac{nx}{n+1}\right) \end{array}$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$ comme $\frac{nx}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} x$ et que f est continue on en déduit que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} f(x)$ d'où la convergence simple.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse f admet un limite finie en $+\infty$ que l'on note $l \in \mathbb{R}_+$, il existe donc $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in \left[\frac{A}{2}, +\infty\right[,\ |f(t) - l| \leq \varepsilon$$

On a de plus : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [A, +\infty[,\ \frac{n}{n+1}x \geq \frac{A}{2}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [A, +\infty[,\ \left|f\left(\frac{n}{n+1}x\right) - l\right| \leq \varepsilon$. Enfin puisque $A \geq \frac{A}{2}$ on a aussi $\forall x \in [A, +\infty[,\ |f(x) - l| \leq \varepsilon$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [A, +\infty[$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - l| + |f(x) - l| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part puisque f est continue sur $[0, A]$ d'après le théorème de Heine elle y est uniformément continue. Autrement dit il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, A],\ |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Or pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, A]$ on a $\left|\frac{n}{n+1}x - x\right| = \frac{x}{n+1} \leq \frac{A}{n+1}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ai

$\frac{A}{n+1} \leq \delta$. On dès lors :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0, A]\,,\ \left|\frac{n}{n+1}x - x\right| \leq \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

On obtient ainsi $\forall n \geq N,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ et on en conclut que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3 - Calcul de limite (⋆⋆⋆)

Déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{dx}{\sqrt[n]{n^n - x^n}}$$

Afin d'appliquer le théorème de convergence dominée, on peut soit utiliser des fonction indicatrices, soit effectuer le changement de variable $u = \frac{x}{n}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^n \frac{dx}{\sqrt[n]{n^n - x^n}} &= \int_0^n \frac{dx}{n\sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^n}} \\ &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt[n]{1 - u^n}}\end{aligned}$$

On note alors pour $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$:

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \frac{1}{\sqrt[n]{1-u^n}} \end{array}$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée, pour cela on remarque que :

- Pour $n \geq 2,\ f_n$ est continue par morceaux sur $[0, 1[$.

- On a pour u fixé $f_n(u) = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln(1 - u^n)\right)$ or $-\frac{1}{n}\ln(1 - u^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Il en résulte que (f_n) converge simplement vers la fonction constante égale à 1.

- la fonction constante égale à 1 est évidemment intégrable sur $[0, 1[$.

- On a les inégalités suivantes :

  $$0 \leq \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \leq \frac{du}{\sqrt{1-u^n}} \leq \frac{du}{\sqrt[n]{1-u^n}}$$

  Donc $0 \leq f_n(u) \leq f_2(u)$, or on peut écrire :

  $$\begin{aligned}f_2(u) &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-u)(1+u)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+u}} \times \frac{1}{\sqrt{1-u}}\end{aligned}$$

  D'où $f_2(u) \underset{u\to1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u}} > 0$, ainsi en utilisant la comparaison des intégrale de terme équivalent ne changeant pas de signe, on peut affirmer que f_2 est intégrable par critère de Riemann en 1. Ainsi l'hypothèse de domination est satisfaite.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et l'on en déduit :

$$\int_0^1 f_n(u)\,du \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 f(u)\,du = 1$$

En revenant à l'intégrale du début on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \frac{dx}{\sqrt[n]{n^n - x^n}} = 1$

Exercice 4 - Caractérisation d'une base orthonormée $(\star\star\star)$

Soit E un espace euclidien de dimension finie et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs tels que :

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$$

1. Montrer que e est génératrice.

> Si $x \in Vect\,(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$, alors $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 = 0$ d'où $x = 0$. Cependant E étant de dimension finie on a :
>
> $$E = Vect\,(e_1, \dots, e_n) + Vect\,(e_1, \dots, e_n)^{\perp}$$
>
> Ainsi $E = Vect\,(e_1, \dots, e_n)$ et donc $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice.

2. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \|e_i\| \leq 1$.

> Soit $j \in [\![1, n]\!]$ on a :
>
> $$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, e_i\rangle^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} \langle e_j, e_i\rangle^2$$
>
> On en déduit que :
>
> $$\|e_j\|^2 \left(1 - \|e_j\|^2\right) = \sum_{i \neq j} \langle e_j, e_i\rangle^2 \geq 0$$
>
> Dès lors $\|e_j\| \leq 1$.

3. Montrer que e est une base orthonormée si et seulement si e est normée *i.e* $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \|e_i\| = 1$

> Le sens directe résulte de la définition d'une famille orthonormale, pour la réciproque, il suffit, en supposant les e_i unitaire, de montrer que e est orthonormale, puisqu'on sait déjà qu'elle est génératrice.
>
> Or si les e_i sont unitaires l'égalité précédente devient :
>
> $$1 = 1 + \sum_{i \neq j} \langle e_j, e_i\rangle^2$$
>
> Ainsi l'on a une somme de terme positifs qui s'annulent donc chaque terme est nul. Dès lors $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle e_j, e_i\rangle = \delta_{i,j}$ ainsi la famille est orthonormale et donc c'est une base orthonormée.

Exercice 5 - Espace l^2 $(\star\star\star\star)$

Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} /\ \sum u_n^2 < +\infty\right\}$, pour $(u, v) \in E^2$, on pose $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que $\langle u, v\rangle$ existe pour u et v dans E.

> Soit $n \in \mathbb{N}$ on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:
>
> $$\sum_{k=0}^{n} |u_k v_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2}$$
>
> Or u et v sont des éléments de E ainsi les deux séries ci-dessus sont convergente, on en déduit que la série

$\sum u_n v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord la suite nulle est un élément de E, de plus si u et v sont deux éléments de E et que $\lambda \in \mathbb{R}$ on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k)^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 + 2\lambda \sum_{k=0}^{n} u_k v_k + \lambda^2 \sum_{k=0}^{n} v_k^2$$

Les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ converge car u et v sont des éléments de E, de plus d'après ce qui précède la série $\sum u_n v_n$ converge également ainsi la série $\sum (u_n + \lambda v_n)^2$ converge. On en déduit que E est stable par combinaison linéaire, c'est donc un espace vectoriel.

3. Montrer que $\langle u, v \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Soient $(u, v, w) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k) w_k = \sum_{k=0}^{n} u_k w_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} v_k w_k$$

Chacun des deux séries du membre de droite possède une limite, ainsi le terme de gauche en possède une également et de plus on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \lambda v_k) w_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k w_k + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} v_k w_k$$

Ainsi $\langle ., . \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. De plus par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ on en déduit qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique. A présent montrons qu'elle est définie positive, pour ça on considère $u \in E$ telle que $\langle u, u \rangle = 0$ autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \tag{1}$$

Or les sommes partielles de la série à terme positif $\sum u_n^2$ forment une suite croissante et l'on a :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$$

Par récurrence immédiate on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$. Finalement on définit bien un produit scalaire sur E.

Exercice 6 - Moyenne des itérés (⋆⋆⋆)

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \mathrm{Im}(f - Id)$ et que cette somme directe est orthogonale.

Commençons par montrer que $\ker(f - Id)$ et $\mathrm{Im}(f - Id)$ sont orthogonaux. Soit $x \in \ker(f - Id)$ et $y \in \mathrm{Im}(f - Id)$. On a alors $f(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = f(z) - z$, notamment pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$y = f(z + \lambda x) - (z + \lambda x)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\|z+\lambda x\| &\geq \|f(z+\lambda x)\|^2 \\ &\geq \|y+z+\lambda x\|^2 \\ &\geq \|z+\lambda x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle^2 + 2\langle z,y\rangle^2 + \|y\|^2\end{aligned}$$

En divisant par λ et en faisant tendre λ vers $\pm\infty$ on obtient $\langle x,y\rangle = 0$. Ce qui entraîne qie les deux sous espaces vectoriels sont orthogonaux. On en déduit que leur intersection est réduite à $\{0\}$, de plus on a de façon évidente $\ker(f-Id)+\operatorname{Im}(f-Id)\subset E$ or $f-Id\in\mathcal{L}(E)$ ainsi d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned}\dim\Big(\ker(f-Id)+\operatorname{Im}(f-Id)\Big) &= \dim\ker(f-Id)+\dim\operatorname{Im}(f-Id)-\dim\Big(\ker(f-Id)\cap\operatorname{Im}(f-Id)\Big) \\ &= \dim\ker(f-Id)+\dim\operatorname{Im}(f-Id) \\ &= \dim E\end{aligned}$$

Ainsi on a bien $E=\ker(f-Id)\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im}(f-Id)$

2. Montrer que $\Big(\operatorname{Im}(f-Id)\Big)^{\perp} = \ker(f-Id) = \ker\Big((f-Id)^*\Big)$.

D'après ce qui précède on a déjà $\Big(\operatorname{Im}(f-Id)\Big)^{\perp} = \ker(f-Id)$ montrons à présent que $\ker\Big((f-Id)^*\Big) = \Big(\operatorname{Im}(f-Id)\Big)^{\perp}$, soit donc $x\in\ker\Big((f-Id)^*\Big)$ on a :

$$\begin{aligned}& (f-Id)^*(x)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall y\in E,\ \langle (f-Id)^*(x), y\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall y\in E,\ \langle x, (f-Id)(y)\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x\in\Big(\operatorname{Im}(f-Id)\Big)^{\perp}\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. Montrer que la suite $u_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\ker(f-Id)$.

D'après la question 1. pour $x\in E$ il existe $a\in\ker(f-Id)$ et $b\in\operatorname{Im}(f-Id)$ tel que $x=a+b$ or $f(a)=a$ et donc $u_n(a)=a$. De plus il existe $y\in E$ tel que $b=f(y)-y$ d'où :

$$\begin{aligned}u_n(b) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(b) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(f(y)-y) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{(k+1)}(y)-f^{(k)}(y) \\ &= \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n+1} f^{(k)}(y)-\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(y)\Big) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(y)-y}{n+1}\end{aligned}$$

Or $\|f^{(p+1)}\|\leq 1$ d'où $\|u_n(b)\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Ainsi $u_n(x)=u_n(a)+u_n(b) \underset{n\to+\infty}{\to} a$, on en déduit donc que (u_n)

converge vers la projection orthogonal sur $\ker(f - Id)$ parallèlement à $\text{Im}(f - Id)$.

Exercice 7 - Minimisation d'une intégrale (⋆⋆)

Déterminer la valeur de :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x$$

On pense à une projection après avoir introduit le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$. On cherche donc :

$$\inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \|e^x - P(x)\|^2 = \|e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)\|^2$$

où $p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)$ est la projection orthogonale de e^x sur $\mathbb{R}_1[X]$. Pour le calculer on utilise le fait que $(1, x)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$ ainsi $p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x) = ax + b$ et donc :

$$\begin{aligned}
\langle e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x), 1\rangle &= 0 \\
\int_0^1 e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)\, \mathrm{d}x &= 0 \\
\int_0^1 e^x - \int_0^1 p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)\, \mathrm{d}x &= 0 \\
e - 1 - \int_0^1 ax + b\mathrm{d}x &= 0 \\
e - 1 - \left[a\frac{x^2}{2} + bx\right]_0^1 &= 0 \\
e - 1 - \frac{a}{2} - b &= 0 \\
\frac{a}{2} + b &= e - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x), x\rangle &= 0 \\
\int_0^1 \Big(e^x - p_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)\Big) x\mathrm{d}x &= 0 \\
\int_0^1 xe^x - \int_0^1 xp_{\mathbb{R}_1[X]}(e^x)\, \mathrm{d}x &= 0 \\
[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x - \int_0^1 ax^2 + bx\mathrm{d}x &= 0 \\
e - (e-1) - \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2}\right]_0^1 &= 0 \\
1 - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} &= 0 \\
\frac{a}{3} + \frac{b}{2} &= 1
\end{aligned}$$

En résolvant le système ci-dessus on trouve $a = 18 - 6e$ et $b = 4e - 10$, il ne reste plus qu'à calculer :

$$\begin{aligned}
\|e^x - ax - b\|^2 &= \int_0^1 \Big(e^x - ax - b\Big)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x - 2\int_0^1 (ax+b)\, e^x\mathrm{d}x + \int_0^1 a^2x^2 + 2abx + b^2\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - 2\Big([(ax+b)\, e^x]_0^1 - \int_0^1 ae^x\mathrm{d}x\Big) + \left[a^2\frac{x^3}{3} + 2ab\frac{x^2}{2} + b^2x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) - 2\left(a + (e-1)\, b\right) + \frac{a^2}{3} + ab + b^2 \\
&= -\frac{7}{2}e^2 + 20e - \frac{57}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 8 - Produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (⋆⋆)

Pour A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose alors $\langle A, B\rangle = \text{tr}\left({}^tAB\right)$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a par propriété de la trace :

$$\langle A, b\rangle = \operatorname{tr}\left({}^tAB\right) = \operatorname{tr}\left({}^t\left({}^tAB\right)\right) = \operatorname{tr}\left({}^tBA\right) = \langle B, A\rangle$$

De plus par bilinéarité du produit ainsi que par la linéarité de la transposée et de la trace, on en déduit que la forme $\langle ., .\rangle$ est donc bilinéaire et symétrique.
Enfin si $\langle A, A\rangle = 0$, on en déduit en posant $A = (a_{i,j})$:

$$\operatorname{tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}^2 = 0$$

Ainsi $\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = 0$ et donc $A = 0$. Finalement la forme $\langle ., .\rangle$ est bien un produit scalaire.

2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on remarque tout d'abord que :

$$A = \frac{A +^t A}{2} + \frac{A -^t A}{2}$$

Où $\frac{A+^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{A-^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ainsi on a $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrons à présent que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ce qui montrera que leur intersection est réduite à $\{0\}$ et donc que la somme est bien directe.
Soient donc $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a donc par définition $A =^t A$ et $B = -^tB$, ainsi par propriété de la transposée et de la trace :

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &= \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)\\ &= \operatorname{tr}\left({}^t\left({}^tAB\right)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left({}^tBA\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(-BA\right)\\ &= -\operatorname{tr}\left(BA\right)\\ &= -\operatorname{tr}\left(AB\right)\\ &= -\operatorname{tr}\left({}^tAB\right)\end{aligned}$$

D'où $\langle A, B\rangle = 0$ ainsi on a bien $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et donc $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Monter que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,,\ \mathrm{d}\Big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\Big) = \frac{1}{2}\|A -^t A\|$. Déterminer de même $\mathrm{d}\Big(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\Big)$.

Par définition on a $\mathrm{d}\Big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\Big) = \inf\limits_{S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \mathrm{d}\left(A, B\right)$. Or on sait que cette borne inférieure est atteinte pour $B = p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A)$, où $p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$ désigne la projection orthogonale sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, d'après ce qui précède on a

$p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A+^t A}{2}$, ainsi on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\Big(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\Big) &= \|A - p_{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}(A)\| \\
&= \|A - \left(\frac{A +^t A}{2}\right)\| \\
&= \|\frac{A -^t A}{2}\| \\
&= \frac{1}{2}\|A -^t A\|
\end{aligned}$$

Enfin, le même raisonnement appliqué cette fois à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ conduit à $\mathrm{d}\Big(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\Big) = \frac{1}{2}\|A +^t A\|$.

Exercice 9 - Si on enlève la linéarité... $(\star\star\star)$

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application telle que :

$$\forall (x, y), \ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

1. Démontrer que l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.

Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base orthonormale de E. Alors on a pour i et j de $[\![1, n]\!]$ on a :

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$$

Ce qui prouve bien que $(f(e_i))$ est une base orthonormée.

2. En déduire que f est linéaire.

Soit $x \in E$ on a :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$$

Ainsi d'après les propriétés de f on en déduit :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), f(e_i)\rangle f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i)$$

Soit à présent $y \in E$ on a d'une part :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i) \qquad f(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle f(e_i)$$

D'où pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) + \lambda \times f(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i\rangle f(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\langle x, e_i\rangle + \lambda \langle y, e_i\rangle\Big) f(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x + \lambda y, e_i\rangle f(e_i)
\end{aligned}$$

Mais aussi :

$$f(x + \lambda y) = \sum_{i=1}^{n} \langle x + \lambda y, e_i\rangle f(e_i)$$

Ce qui prouve que f est bien linéaire.

Exercice 10 - Stabilité de l'orthogonal $(\star\star)$

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $u\big(F^{\perp}\big) = u(F)^{\perp}$.

Comme u est un automorphisme de E, pour tout $x \in u\big(F^{\perp}\big)$ il existe un unique $y \in F^{\perp}$ tel que $u(x) = y$. De plus u préservant le produit scalaire on a la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x \in u\big(F^{\perp}\big) &\Longleftrightarrow y \in F^{\perp} \\ &\Longleftrightarrow \forall z \in F,\ \langle y, z\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \forall z \in F,\ \langle u(y)\,, u(z)\rangle = 0 \\ &\longleftarrow \forall z \in F,\ \langle x, u(z)\rangle = 0 \\ &\longleftarrow x \in u(F)^{\perp} \end{aligned}$$

D'où l'égalité désiré.

2. Démontrer que F est stable par u si, et seulement si $F^{\perp}$ est stable par u.

Si F est stable par u on a en réalité $u(F) = F$ car u est une isométrie et on obtient l'inclusion réciproque par égalité des dimensions. Ainsi d'après ce qui précède on a :

$$u\big(F^{\perp}\big) = [u(F)]^{\perp} = F^{\perp}$$

D'où le résultat. Pour la réciproque il suffit de remarquer que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Exercice 11 - Pas de supplémentaire orthogonal $(\star\star)$

On considère $E = \mathcal{C}(([0,1]\,, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

On pose $F = \{f \in E/\ f(0) = 0\}$. Montrer que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Soit $g \in F^{\perp}$, on remarque tout d'abord que $h : x \mapsto xg(x)$ est dans F, ainsi $\langle g, h\rangle = 0$ ce qui donne :

$$\int_0^1 tg^2(t)\, dt = 0$$

Or la fonction dans l'intégrale est positive, ainsi l'intégrale étant nulle on en déduit que la fonction est identiquement nulle. Autrement dit $\forall x > 0,\ g(x) = 0$, de plus g est continue en 0 ainsi on en déduit que g est identiquement nulle.

On peut donc en conclure que $F^{\perp} = \{0\}$, dès lors si on avait $F \oplus F^{\perp} = E$ on aurait $F = E$, ce qui n'est pas le cas car toute les fonctions continues ne s'annulent pas en $0\,!$.
