

D.S. N° 4 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1. On lance indéfiniment une pièce qui tombe à chaque fois sur PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On note, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement « La pièce tombe sur FACE au k -ième lancer ».

1. **Le premier PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement E_n : « Le premier PILE apparaît au n -ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « FACE, FACE, PILE », alors l'événement E_3 est réalisé.

- (a) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $v_n = P(E_n)$.
- (b) Quelle est la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur PILE ?

2. **Le premier double PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_n : « Le premier double PILE apparaît au n -ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « PILE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE », alors l'événement D_7 est réalisé.

- (a) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(D_n)$. (La probabilité u_1 vaut 0.) Calculer u_2 .
- (b) Exprimer $P(D_{n+2} \mid F_1)$ et $P(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2)$ en fonction de u_n et de u_{n+1} .
- (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3} \cdot u_{n+1} + \frac{2}{9} \cdot u_n.$$

- (d) Calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
- (e) En déduire la probabilité de l'événement « On n'obtient jamais de double PILE ».

Exercice 2. On souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) la fonction f est de classe C^1
- (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$
- (iii) la fonction f' est croissante,
- (iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence d'une solution au problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

2. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$$

3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.
4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

5. Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.
6. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p) \quad \text{et} \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$$

7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.
8. Conclure que $\varphi = g$.

Exercice 3. On considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des **polynômes de Hermite** définie par les relations :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = XH_n - H'_n$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- (a) H_n est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré n ;
- (b) $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.

2. Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2} dx.$$

- (a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P | Q \rangle$.
 - (b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
 - (c) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P' | H_n \rangle$.
 - (d) En déduire que les polynômes de Hermite sont deux à deux orthogonaux.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par $\varphi(P) = XP' - P''$ pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
- (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - (b) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme H_k est un vecteur propre de φ .
 - (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Quel est son spectre ?

Exercice 4. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite de nombres réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$,

$P_n = \prod_{k=p}^n u_k$. On dit que la suite $(P_n)_{n \geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geq p} u_n$. Si la suite

$(P_n)_{n \geq p}$ converge, alors on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose : $\prod_{k=p}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

1. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$: $\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions continues sur \mathcal{S} à valeurs dans $] -1, +\infty[$.

On suppose que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur \mathcal{S} .

Soient, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x)) \quad , \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M |f_{n+1}(x)|$.
3. Montrer que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$.
4. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathcal{S} vers la fonction

$$P : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(x))$$

5. Montrer que cette convergence est uniforme et que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur \mathcal{S} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-nx^2})$.

6. Montrer que la fonction f est bien définie et qu'elle est continue sur \mathbb{R}_+^* .
7. Montrer que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+^* puis étudier la limite de f en 0.