# Corrigé du D.S. n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

**Exercice 1.**

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ : $E_n = F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap \overline{F_n}$ et ces événements sont indépendants, donc

$$P(E_n) = P(F_1) \times \cdots \times P(F_{n-1}) \times P(\overline{F_n}) = \frac{2}{3^n}.$$

(b) Les événements $E_n$ sont disjoints deux à deux, d'où : par $\sigma-$additivité, $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1$. Donc l'événement $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$ « la pièce tombe au moins une fois sur PILE » est presque certain.

Autre méthode — Le contraire de l'événement « la pièce tombe au moins une fois sur PILE » est l'événement « la pièce tombe toujours sur FACE », égal à $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$. Par continuité décroissante, $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_n\right)$. Or, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ car les événements $F_k$ sont indépendants.

2. (a) $D_2 = \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ et ces événements sont indépendants, donc $P(D_2) = P(\overline{F_1}) \cdot P(\overline{F_2}) = \frac{4}{9}$.

(b) $P(D_{n+2} \mid F_1) = u_{n+1}$ car on sait que la pièce tombe la première fois sur FACE (ce qui remet le compteur à zéro). Donc $D_{n+2}$ se réalise si, et seulement si, on obtient le premier double PILE après encore $n+1$ lancers.

$P(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2) = u_n$ car on sait que la pièce tombe la première fois sur Pile et la deuxième fois sur Face (ce qui remet le compteur à zéro). Donc $D_{n+2}$ se réalise si, et seulement si, on obtient le premier double PILE après encore $n$ lancers.

(c) $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \bigcup \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1}\right)$ et $D_{n+2} \cap \overline{F_1} = \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right) \bigcup \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2$ car l'événement $D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap \overline{F_2}$ est impossible.

D'où $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_1) \bigcup \left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right)$. L'union est disjointe, d'où

$$P(D_{n+2}) = P\left(D_{n+2} \cap F_1\right) + P\left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right).$$

Or $P\left(D_{n+2} \cap F_1\right) = P(F_1) \cdot P(D_{n+2} \mid F_1) = \frac{1}{3} \cdot P(D_{n+2} \mid F_1)$ et
$P\left(D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap F_2\right) = P\left(\overline{F_1} \cap F_2\right) \cdot P\left(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2\right) = \frac{1}{3}\frac{2}{3} \cdot P\left(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2\right)$ car les événements $\overline{F_1}$ et $F_2$ sont indépendants. Donc

$$u_{n+2} = \frac{1}{3} \cdot u_{n+1} + \frac{2}{9} \cdot u_n.$$

(d) L'équation caractéristique de la suite $(u_n)$ est $\lambda^2 = \frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{9}$. Elle a deux solutions distinctes : $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. D'où $\exists K \in \mathbb{R},\ \exists L \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = K \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + L \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Les constantes $K$ et $L$ sont fixées par les deux conditions initiales $u_1 = 0$ et $u_2 = \frac{4}{9}$. D'où $K = \frac{4}{3}$ et $L = \frac{2}{3}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(e) L'événement « On n'obtient jamais de double PILE » est le contraire $\overline{D}$ de l'événement $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$.

L'union est disjointe, d'où : par $\sigma-$additivité, $P(D) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = K \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{1-\frac{1}{3}} + L \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1$.

Donc $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 0$. L'événément $\overline{D}$ est donc presque impossible.

**Exercice 2** (CCINP Maths PC 2024)**.**

## Partie I - Existence de la solution du problème étudié

1. Soit $x \in ]0; +\infty[$ : $\frac{1}{n}$ et $\frac{x}{n}$ tendent vers 0 quand $n$ tend vers $\infty$, d'où (développement limité) :

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{x^2-x}{2n^2} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est équivalent à $\dfrac{x^2-x}{2n^2}$ qui ne change pas de signe. Par comparaison aux séries de Riemann (avec $2 > 1$), on en déduit que la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$x \mapsto 1 + \dfrac{x}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par composition, $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Par somme, la fonction $u_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\frac{1}{1+\dfrac{x}{n}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} = -\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$$

où $\varepsilon_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$. Par développement limité, $\varepsilon_n \sim -\dfrac{1}{2n^2}$, d'où $|\varepsilon_n| \sim \dfrac{1}{2n^2}$. Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Donc la série $\sum \varepsilon_n$ converge absolument.

3. Soit $(a, b) \in ]0; +\infty[^2$ tel que $a < b$.
Pour tous $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité triangulaire (en remarquant que $x$ est positif),

$$|u_n'(x)| \leq \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|$$

Or $x \in [a, b]$, donc $n(n + x) \geq n(n + a) > 0$ et $\dfrac{x}{n(n+x)} \leq \dfrac{b}{n(n+a)}$ puis

$$|u_n'(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$$

Quand $n$ tend vers l'infini, $\dfrac{b}{n(n+a)} \sim \dfrac{b}{n^2}$ qui ne change pas de signe, donc la série $\sum \dfrac{b}{n(n+a)}$ converge. De plus, d'après la question précédente, $\sum |\varepsilon_n|$ converge donc la série $\sum \left(\dfrac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|\right)$ converge. On conclut que la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a, b]$.

4. i) — La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b]$.
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
   — La série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, b]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Ceci est vrai sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0; +\infty[$ donc vrai sur $]0, +\infty[$. En ajoutant la fonction ln, elle aussi $\mathcal{C}^1$, on conclut que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$$

ii) Soit $x \in ]0; +\infty[$ : $\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$, où

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+x+1) + \ln(n) + \ln(n+x) - \ln(n) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n+x) - \ln(n+1+x) \end{aligned}$$

Par téléscopage, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N} v_n(x) = \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(1+x) - \ln(N+1+x) = \ln(1+x) - \ln\left(1 + \frac{x}{N+1}\right).$$

Puis, en faisant tendre $N$ vers l'infini : $\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \ln(1+x) - 0$ donc

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$$

iii) La fonction $\varphi'$ est la somme d'une constante $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$, de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et des fonctions $x \mapsto \frac{x}{n(n+x)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ qui sont toutes croissantes sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $\varphi'$ est croissante.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = 0$ et $\ln(1) = 0$ donc $\varphi(1) = 0$.

La fonction $\varphi$ vérifie donc les conditions de $(C)$.

## Partie II - Unicité de la solution

5. D'après la condition (ii) de $(C)$, vérifiée par $\varphi$ et par $g$ : $\forall x > 0,\ h(x+1) = h(x)$. D'après la condition (i) de $(C)$, $h$ est la différence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$, donc on peut dériver de part et d'autre de cette égalité pour obtenir : $\forall x > 0,\ h'(x+1) = h'(x)$.
6. Soient $x \in ]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ : $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p)$. La fonction $\varphi'$ est croissante d'après la condition (iii) de $(C)$. Or $p \leq x+p \leq p+1$ donc $\varphi'(p) \leq \varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p)$.
   De même $g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(1+p)$ donc $-g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p)$.
   En additionnant, on obtient :

   $$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p).$$

   En dérivant la condition (ii) de $(C)$, on obtient $g'(1+p) - g'(p) = \frac{1}{p}$ donc $g'(1+p) = g'(p) + \frac{1}{p}$.
   Par définition de $h$, $h'(p) = \varphi'(p) - g'(p)$ donc $\varphi'(p) = h'(p) + g'(p)$.
   En faisant la différence des deux relations obtenues,

   $$\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}$$

On en déduit que $h'(x+p) \geq h'(p) - \frac{1}{p}$ puis que $h'(x+p) - h'(p) \geq -\frac{1}{p}$. En échangeant les rôles joués par $\varphi$ et $g$ dans ce qui précède, on obtient $h'(x+p) - h'(p) \leq \frac{1}{p}$. D'où l'encadrement $-\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(x) \leq \frac{1}{p}$ qui prouve que $|h'(x+p) - h'(x)| \leq \frac{1}{p}$.

7. Soient $x \in ]0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. D'après 5, la fonction $h'$ est $1-$périodique donc $h'(x+p) = h'(x)$ et $h'(p) = h'(1)$ et, de la question précédente, on tire alors :

$$|h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{p}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Cette inégalité large passe à la limite $p \to \infty$, d'où $|h'(x) - h'(1)| \leq 0$, donc $h'(x) = h'(1)$. La fonction $h'$ est donc constante sur $]0,1]$. Par ailleurs, elle est $1-$périodique, donc elle est constante sur $]0, +\infty[$.

8. On note $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $h'(x) = c$. Alors, pour tout $x > 0$, $h(x) = c(x-1)$ car $h(1) = 0$ d'après la condition (iv) de $(C)$. De plus, pour tout $x > 0$, $h(x+1) = h(x)$, donc $cx = cx - c$ et $c = 0$. Finalement, pour tout $x > 0$, $h(x) = 0$ et

$$\varphi = g$$

**Exercice 3** (CCINP Maths 2 MP 2016)**.**

1. (a) Le polynôme $H_0 = 1$ est bien unitaire et de degré 0, ce qui initialise la récurrence.
   Si le polynôme $H_n$ est unitaire et de degré $n$, alors le polynôme $XH_n$ est unitaire et son degré, égal à $n+1$, est strictement supérieur à celui de $H'_n$, d'où $H_{n+1}$ est unitaire et $\deg(H_{n+1}) = n+1$.

   Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{le polynôme } H_n \text{ est unitaire et de degré } n}$.

   (b) Comme $H_0 = 1$ et $H_1 = XH_0 - H'_0 = X$, il est vrai que $H'_1 = H_0$, ce qui initialise la récurrence.
   Si $H'_{n+1} = (n+1)H_n$, alors :
   — d'une part, $H_{n+2} = XH_{n+1} - (n+1)H_n$, d'où (en dérivant) $H'_{n+2} = H_{n+1} + XH'_{n+1} - (n+1)H'_n$ ;
   — d'autre part, $XH'_{n+1} = (n+1)XH_n$.
   D'où $H'_{n+2} = H_{n+1} + (n+1)XH_n - (n+1)H'_n = H_{n+1} + (n+1)(XH_n - H'_n) = H_{n+1} + (n+1)H_{n+1}$ par définition de $H_{n+1}$. Donc $H'_{n+2} = (n+2)H_{n+1}$, ce qui rend la propriété héréditaire.

   Finalement, $\boxed{H'_{n+1} = (n+1)H_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Soient $P$ et $Q$ deux polynômes. Si l'un d'eux est nul, l'intégrale $\langle P|Q\rangle$ est nulle. Sinon, cette intégrale converge si, et seulement si les deux intégrales de 0 à $+\infty$ et de $-\infty$ à 0 convergent.
   Soient alors $aX^p$ et $bX^q$ les termes dominants respectifs des polynômes $P$ et $Q$ : la première intégrale est de même nature que $\int_0^{+\infty} x^{p+q}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$ car $P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2/2} \underset{+\infty}{\sim} abx^{p+q}\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Or $x^{p+q}\mathrm{e}^{-x^2/2} = \underset{+\infty}{o}(\mathrm{e}^{-x})$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ converge. La première intégrale est donc convergente et, de même, la deuxième. Finalement, $\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx \text{ est convergente.}}$

   (b) Soient deux réels $\lambda$ et $\mu$ et trois polynômes $P$, $Q$ et $R$ :
   — de $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit que $\langle P|Q\rangle = \langle Q|P\rangle$ ;
   — par linéarité de l'intégrale, $\langle \lambda P + \mu Q|R\rangle = \lambda\langle P|R\rangle + \mu\langle Q|R\rangle$, d'où la linéarité à gauche et, par symétrie, la bilinéarité ;

— de $P^2(x) \geq 0$ et $\mathrm{e}^{-x^2/2} \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on déduit que $\langle P|P\rangle$ est positif ;

— si $\langle P|P\rangle = 0$, alors $P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est positive et continue. Or $\mathrm{e}^{-x^2/2} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le polynôme $P$ a une infinité de racines, il est donc nul.

Finalement, $\boxed{\text{la forme } \langle\cdot|\cdot\rangle \text{ est bilinéaire, symétrique et définie positive.}}$

(c) Calculons l'intégrale $\langle P'|H_n\rangle$ en intégrant par parties : les fonctions $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} u(x) = P(x) \\ v(x) = H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2} \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\begin{cases} u'(x) = P'(x) \\ v'(x) = [H_n'(x) - xH_n(x)]\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \end{cases}$.
De plus, $[u(x)v(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ par croissances comparées, d'où

$$\langle P'|H_n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)v(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v'(x)\,dx = -\langle P|H_n' - XH_n\rangle = \langle P|H_{n+1}\rangle$$

par définition de $H_{n+1}$. Donc $\boxed{\langle P'|H_n\rangle = \langle P|H_{n+1}\rangle}$ pour tous $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

(d) Soient $i$ et $j$ deux entiers naturels distincts. D'après la question 1) b) et la question précédente, on a :

$$\langle H_i|H_j\rangle = \frac{1}{i+1}\langle H_{i+1}'|H_j\rangle = \frac{1}{i+1}\langle H_{i+1}|H_{j+1}\rangle$$

Et, par symétrie, on a aussi $\langle H_i|H_j\rangle = \frac{1}{j+1}\langle H_{i+1}|H_{j+1}\rangle$. Ainsi, comme $i \neq j$, on en déduit $\langle H_i|H_j\rangle = 0$.

On a prouvé que $\boxed{\text{les polynômes de Hermite sont orthogonaux deux à deux.}}$

3. (a) L'application $\varphi$ est linéaire et, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(\varphi(P)) \leq \max(\deg(XP'), \deg(P''))$. Or $\deg(XP') = \deg(X) + \deg(P') \leq 1 + \deg(P) - 1$ et $\deg(P'') \leq \deg(P) - 2$. Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\varphi$.

(b) Pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $H_k$ est non nul et

$$\begin{aligned}
\varphi(H_k) &= XH_k' - H_k'' \\
&= (XH_k - H_k')' - H_k \\
&= H_{k+1}' - H_k \qquad \text{par définition de } H_{k+1} \\
&= (k+1)H_k - H_k \qquad \text{d'après la question 1b} \\
&= kH_k
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0, n]\!], \text{ le polynôme } H_k \text{ est un vecteur propre de } \varphi \text{ associé à la valeur propre } k}$.

(c) On déduit de la question précédente que $\varphi$ possède au moins $\mathrm{Card}([\![0, n]\!]) = n + 1$ valeurs propres distinctes deux à deux. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$, il en a exactement $n + 1$, ce qui implique que $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Sp}(\varphi) = [\![0, n]\!]}$.

**Exercice 4** (Centrale Maths 2 PC 2024)**.**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$ par une étude de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ (ou par convexité de exp). Par conséquent, comme $1 + x_k \geq 0$ pour chaque $x_k \in [-1, +\infty[$, on peut multiplier les inégalités $(1 + x_k) \leq e^{x_k}$ de $k = 1$ à $n$ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

2. Soient $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) - Q_n(x) &= \left(\prod_{k=1}^{n}(1 + |f_k(x)|)\right)(1 + |f_{n+1}(x)| - 1) \\ &\leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right)|f_{n+1}(x)| \text{ d'après la question précédente} \\ &\leq \exp\left(R_0(x)\right)|f_{n+1}(x)| \quad \text{car} \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)| = R_0(x) \end{aligned}$$

Chaque fonction $|f_n|$ est continue et la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément sur $S$, on en déduit que la fonction $R_0$ est continue sur le segment $S$ donc $R_0$ est bornée, donc en particulier majorée. Il existe donc $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in S$, $R_0(x) \leq M$ d'où :

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^{R_0(x)}|f_{n+1}(x)| \leq e^M|f_{n+1}(x)|$$

3. Soient $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{aligned} |P_{n+1}(x) - P_n(x)| &= |1 + f_{n+1}(x) - 1| \left|\prod_{k=1}^{n}(1 + f_k(x)\right| \\ &\leq |f_{n+1}(x)| \prod_{k=1}^{n}(1 + |f_k(x)|) \\ &\leq (1 + |f_{n+1}(x)| - 1)\, Q_n(x) \\ &\leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \end{aligned}$$

4. Commençons par la convergence simple. Soit $x \in S$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(P_{k+1}(x) - P_k(x)) + P_1(x)$$

Et la série $\sum_{k \geq 1}(P_{k+1}(x) - P_k(x))$ est absolument convergente (donc convergente) car $|P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq e^M|f_{k+1}(x)|$ et la série $\sum_{k \geq 1}|f_{k+1}(x)|$ est convergente car la série de fonctions $\sum_{k \geq 1}|f_k|$ converge uniformément (donc simplement) sur $S$. Par conséquent, la suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ est convergente et :

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + f_k(x)) = \lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(P_{k+1}(x) - P_k(x)) + P_1(x)$$

5. Pour tout $N \geq n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in S$, $\sum_{k=n}^{N}(P_{k+1}(x) - P_k(x)) = P_{N+1}(x) - P_n(x)$ (télescope) et, en passant à la limite $N \to \infty$ (qui existe d'après la question précédente), on obtient : $\sum_{k=n}^{+\infty}(P_{k+1}(x) - P_k(x)) =$

$P(x) - P_n(x)$. D'où, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|P_n(x) - P(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} e^M |f_{k+1}(x)| = \mathrm{e}^M R_n(x) \leq \mathrm{e}^M \sup_S |R_n|$$

qui est un majorant. D'où $\sup_S |P_n - P| \leq e^M \sup_S |R_n|$ car le *sup* est le plus petit majorant. Or $\sup_S |R_n|$ tend vers 0 car la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge uniformément. D'où $\lim_{n\to\infty} \sup_S |P_n - P| = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Donc la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $P$ sur $S$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $P_n$ est continue sur $S$ par produit (fini) de fonctions continues et la suite de fonctions $(P_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $S$ donc la fonction $P$ est continue.

De plus, pour tout $x \in S$, le réel $P_n(x)$ est strictement positif car c'est un produit fini de facteurs strictement positifs. D'où $\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+f_k(x))$. Or la série $\sum_{k\geq 1} \ln(1+f_k(x))$ est absolument convergente. En effet, la série $\sum |f_k(x)|$ est convergente (par convergence simple de $\sum |f_k|$), d'où $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$, donc $|\ln(1+f_k(x))| \underset{k\to\infty}{\sim} |f_k(x)|$ qui ne change pas de signe. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+f_k(x))$ est un réel $L$ et, par continuité de *exp* : $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(P_n(x))} = e^L > 0 \quad \text{donc} \quad P(x) > 0$.

6. Pour appliquer les deux questions précédentes, on pose $f_n(x) = -e^{-nx^2}$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Et on vérifie une à une toutes les hypothèses sur la suite $(f_n)$. Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ :
   - pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [a, b]$, $f_n(x) > -1$ car $e^{-nx^2} < 1$
   - la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} |f_n|$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a, b]$ car $|f_n(x)| = e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$ et la série $\sum e^{-na^2}$ converge puisque c'est une série géométrique de raison $e^{-}a^2 \in ]-1, +1[$.

   Par conséquent, $f$ est bien définie et continue sur $[a, b]$ et ceci pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Soit $x, y$ deux réels tels que $0 < x \leq y$.
   Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-nx^2 \geq -ny^2$ donc $1 - e^{-ny^2} \geq 1 - e^{-nx^2} \geq 0$, donc en multipliant ces inégalités :

   $$\prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-nx^2}) \geq \prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-ny^2}) \quad \text{d'où} \quad f(x) \geq f(y)$$

   car les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$. Donc $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   *Limite en* 0. On applique la question 1 :

   $$\forall x > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \prod_{n=1}^{N} \left(1 - e^{-nx^2}\right) \leq \exp\left(\sum_{n=1}^{N} -e^{-nx^2}\right)$$

   Or pour tout $x > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx^2} = \dfrac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ (car c'est une série géométrique de raison $e^{-x^2} \in [0, 1[$).
   Les inégalités larges passent à la limite $N \to \infty$, d'où

   $$\forall x > 0 \quad 0 \leq f(x) \leq \exp\left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right)$$

   Or $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = -\infty$ d'où $\lim_{x\to 0^+} \exp\left(\dfrac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 0$ donc, par le théorème des gendarmes :

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$