D.S. N° 4 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1. On lance indéfiniment une pièce qui tombe à chaque fois sur PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On note, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement « La pièce tombe sur FACE au $k-$ième lancer ».

1. **Le premier PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement E_n : « Le premier PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « FACE, FACE, PILE », alors l'événement E_3 est réalisé.

   (a) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $v_n = P(E_n)$.

   (b) Quelle est la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur PILE ?

2. **Le premier double PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_n : « Le premier double PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « PILE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE », alors l'événement D_7 est réalisé.

   (a) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(D_n)$. (La probabilité u_1 vaut 0.) Calculer u_2.

   (b) Exprimer $P(D_{n+2} \mid F_1)$ et $P(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2)$ en fonction de u_n et de u_{n+1}.

   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+2} = \frac{1}{3} \cdot u_{n+1} + \frac{2}{9} \cdot u_n.$$

   (d) Calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

   (e) En déduire la probabilité de l'événement « On n'obtient jamais de double PILE ».

Exercice 2. On souhaite déterminer les fonctions $f\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) la fonction f est de classe C^1 (ii) pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x+1)-f(x)=\ln(x)$

(iii) la fonction f' est croissante, (iv) la fonction f s'annule en 1 , c'est-à-dire $f(1)=0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence d'une solution au problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n\ :]\,0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad u_n(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad \varphi(x)=-\ln(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,+\infty[,\quad u_n'(x)=\frac{x}{n(n+x)}+\varepsilon_n$$

3. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.
4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h=\varphi-g$.

5. Montrer que, pour tout $x>0$, $h(x+1)=h(x)$ et $h'(x+1)=h'(x)$.
6. Soient $x\in]0,1]$ et $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\varphi'(p)-g'(1+p)\leqslant h'(x+p)\leqslant\varphi'(1+p)-g'(p)\qquad\text{et}\qquad\varphi'(p)-g'(1+p)=h'(p)-\frac{1}{p}.$$

   En déduire que :

$$|h'(x+p)-h'(p)|\leqslant\frac{1}{p}$$

7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0,+\infty[$.
8. Conclure que $\varphi=g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

9. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N)!}$$

10. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.
11. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

Exercice 3. On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des **polynômes de Hermite** définie par les relations :

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = XH_n - H_n'$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   (a) H_n est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré n ;
   (b) $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.
2. Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx.$$

   (a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q\rangle$.
   (b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
   (c) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P' \mid H_n\rangle$.
   (d) En déduire que les polynômes de Hermite sont deux à deux orthogonaux.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par $\varphi(P) = XP' - P''$ pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, le polynôme H_k est un vecteur propre de φ.
   (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Quel est son spectre ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes deux à deux) de multiplicité impaire du polynôme H_n et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ces racines. Soit S le polynôme défini par :

$$S = 1 \ \text{ si } p = 0 \qquad \text{et} \qquad S = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i) \ \text{ sinon}$$

   (a) Justifier que le polynôme H_n appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et en déduire que si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n\rangle = 0$.
   (b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.
   (c) En déduire que H_n a n racines réelles, distinctes deux à deux.

Exercice 4. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, $P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k$. On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geqslant p} u_n$. Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, alors on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose : $\prod_{k=p}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} P_n$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

(On pourra procéder par récurrence.)

(b) Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$: $\displaystyle \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)$.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.
Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.
On suppose que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
Soient, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + f_k(x)) \quad , \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 + |f_k(x)|) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|$.
3. Montrer que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad |P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$.
4. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathcal{S}$ vers la fonction

$$P : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(x))$$

5. Montrer que cette convergence est uniforme et que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

6. Montrer que la fonction f est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puis étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.