X ESPCI 2005 PC

Corrigé

Polynômes orthogonaux et équations différentielles

Première partie

1. Soit $v = \underbrace{\pi(v)}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in F^\perp}$ la décomposition du vecteur v sur la somme directe $E = F \oplus F^\perp$. Si un couple (u, λ) satisfait les conditions requises $u \in F,\ u + \lambda v \in F^\perp,\ (u + \lambda v \mid v) > 0$ et $\|u + \lambda v\| = \alpha$, λ est différent de 0 (sinon $u \in F \cap F^\perp$ est nul et $(u \mid v) = 0$). On a alors :

$$v = \underbrace{-\frac{1}{\lambda}u}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{\lambda}(u + \lambda v)}_{\in F^\perp} \text{ et donc } u = -\lambda \pi(v) \text{ et } u + \lambda v = \lambda w.$$

On doit donc avoir $(u + \lambda v \mid v) = (\lambda w \mid v) = \lambda \|w\|^2$ d'où $\lambda > 0$ et enfin $\|u + \lambda v\| = \lambda \|w\|$ d'où $\lambda = \dfrac{\alpha}{\|w\|}$.

$$\boxed{\text{S'il existe un couple } (u, \lambda) \text{ vérifiant les conditions requises on a } \lambda = \frac{\alpha}{\|w\|} \text{ et } u = -\frac{\alpha}{\|w\|}\pi(v)}$$

Inversement si l'on pose $\lambda = \dfrac{\alpha}{\|w\|}$ et $u = -\dfrac{\alpha}{\|w\|}\pi(v)$ on a :
$u \in F,\ u + \lambda v = -\dfrac{\alpha}{\|w\|}\pi(v) + \dfrac{\alpha}{\|w\|}(\pi(v) + w) = \dfrac{\alpha}{\|w\|} w \in F^\perp,\ \|u + \lambda v\| = \alpha$ et $(u + \lambda v \mid v) = \alpha \|w\| > 0$.

$$\boxed{\text{Le problème posé a l'unique solution } \lambda = \frac{\alpha}{\|w\|} \text{ et } u = -\frac{\alpha}{\|w\|}\pi(v)}$$

2. Les conditions $w_0 \in E_0 = \mathrm{Vect}(v_0),\ (w_0 \mid v_0) > 0$ et $\|w_0\| = \alpha_0$ entraînent $\boxed{w_0 = \alpha_0 \dfrac{v_0}{\|v_0\|}}$. Soit $p \in [\![1, n]\!]$.
Supposons définis les vecteurs $w_0, w_1, \ldots, w_{p-1}$. Les conditions imposées à w_p sont :

- ◇ $w_p \in E_p = E_{p-1} \oplus \mathrm{Vect}(v_p)$ donc w_p est de la forme $u_p + \lambda_p v_p$ avec $u_p \in E_{p-1}$.
- ◇ $u_p + \lambda_p v_p \in E_{p-1}^\perp$.
- ◇ $(u_p + \lambda_p v_p \mid v_p) > 0$.
- ◇ $\|u_p + \lambda_p v_p\| = \alpha_p > 0$.

Il s'agit exactement du problème traité en **1.** avec E_{p-1} dans le rôle de F et v_p dans celui de v. Il y a existence et unicité de la solution. Par récurrence limitée à $p \leqslant n$ on a bien établi

$$\boxed{\text{l'existence et l'unicité de la base } (w_0, \ldots, w_n) \text{ de } E_n \text{ vérifiant les conditions imposées.}}$$

Deuxième partie

3.a) On voit bien que :

- $\diamond$ $\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a,b])^2,\ (g \mid f) = \phi(gf) = \phi(fg) = (f \mid g)$.
- $\diamond$ $\forall (f,g,h) \in \mathcal{C}([a,b])^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (f \mid (\lambda g + h)) = \phi(\lambda fg + fh) = \lambda\phi(fg) + \phi(fh) = \lambda(f \mid g) + (f \mid h)$.
- $\diamond$ $\forall f \in \mathcal{C}([a,b]),\ f^2$ est positive ou nulle donc $(f \mid f) = \phi(f^2) \geqslant 0$ et $(f \mid f) > 0$ si f n'est pas identiquement nulle.

$\boxed{(f,g) \mapsto (f \mid g) \text{ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, } i.e. \text{ un produit scalaire sur } \mathcal{C}([a,b]).}$

b) Pour tout entier n l'espace $E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ est de dimension 1 (en convenant $E_{-1} = \{0\}$ pour le cas $n = 0$) et contient donc exactement deux polynômes (opposés) de norme α_n, qui sont de degré n. Sur ces deux polynômes **un seul** a un coefficient dominant strictement positif, appelons le P_n.

- Par construction $\boxed{P_n \in E_n}$ et le coefficient de x^n dans P_n $\boxed{k_n \text{ est strictement positif}}$.
- Soient m et n deux entiers distincts. On peut sans restreindre la généralité supposer $m < n$. On a pris P_n dans $E_{n-1}^{\perp}$ qui contient $E_{m-1}^{\perp}$, donc $(P_m \mid P_n) = \boxed{\phi(P_m P_n) = 0}$.
- Par construction $\|P_n\| = \alpha_n$ soit $(P_n \mid P_n) = \boxed{\phi(P_n^2) = \alpha_n^2}$.

$\boxed{\text{Il y a bien existence et unicité de la suite de polynômes } (P_0, P_1, \ldots) \text{ de } E \text{ satisfaisant les conditions requises.}}$

4.a) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$. La considération des monômes dominants des deux membres de la relation

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) + C_n P_{n-2}(x)$$

impose déjà $\boxed{A_n = \dfrac{k_n}{k_{n-1}}}$. Le polynôme $P_n - \dfrac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1}$ est de degré au plus $n-1$ et se décompose sur la base $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ de E_{n-1}. Soit $P_n - \dfrac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i$ cette décomposition et soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

Le produit scalaire avec P_j fournit $(P_n \mid P_j) - (\dfrac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1} \mid P_j) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (P_i \mid P_j) = \lambda_j \alpha_j^2$ soit

$$\boxed{\lambda_j = -\frac{1}{\alpha_j^2}\frac{k_n}{k_{n-1}}(xP_{n-1} \mid P_j).}$$

Par définition $(xP_{n-1} \mid P_j) = \phi(xP_{n-1}P_j) = \phi(P_{n-1}xP_j) = (P_{n-1} \mid xP_j)$ et comme $xP_j \in E_{j+1}$, $\boxed{\text{pour } j \leqslant n-3 \text{ on a } \lambda_j = 0}$ puisque $E_{j+1} \subset E_{n-2}$ et $P_{n-1} \in E_{n-2}^{\perp}$. Il reste $P_n - \dfrac{k_n}{k_{n-1}} x P_{n-1} = \displaystyle\sum_{i=n-2}^{n-1} \lambda_i P_i$.

En posant $\lambda_{n-1} = B_n$ et $\lambda_{n-2} = C_n$ il vient précisément :

$$\boxed{P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) + C_n P_{n-2}(x).}$$

b) On sait déjà que :

$$\boxed{A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}\cdot}$$

On a vu que $C_n = \lambda_{n-2} = -\frac{1}{\alpha_{n-2}^2}\frac{k_n}{k_{n-1}}(xP_{n-1} \mid P_{n-2}) = -\frac{1}{\alpha_{n-2}^2}\frac{k_n}{k_{n-1}}(P_{n-1} \mid xP_{n-2})$. Or le polynôme $P_{n-1} - \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}}xP_{n-2}$ est de degré au plus $n-2$, il est donc orthogonal à P_{n-1}. On a ainsi

$$(P_{n-1} - \frac{k_{n-1}}{k_{n-2}}xP_{n-2} \mid P_{n-1}) = 0 \text{ soit } (xP_{n-2} \mid P_{n-1}) = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}(P_{n-1} \mid P_{n-1}) = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\alpha_{n-1}^2$$

et finalement :

$$\boxed{C_n = -\frac{\alpha_{n-1}^2}{\alpha_{n-2}^2}\frac{k_nk_{n-2}}{k_{n-1}^2}\cdot}$$

5.a) Une fonction polynôme ne change de signe que pour les zéros de multiplicité impaire. Si P_n n'avait aucun zéro de multiplicité impaire dans $]a,b[$, la fonction polynôme associée aurait un signe fixe sur $[a,b]$ et comme ce n'est pas la fonction nulle on aurait $\phi(P_n) \neq 0$ donc $(P_0 \mid P_n) = k_0\phi(P_n) \neq 0$ ce qui est impossible si $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Si } n \geqslant 1,\ P_n \text{ a au moins un zéro de multiplicité impaire dans }]a,b[.}$$

b) Soit $n \geqslant 1$ et r le nombre de zéros de multiplicité impaire de P_n dans $]a,b[$. Notons $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ ces zéros et T_n le polynôme $\prod_{k=1}^{r}(x-a_k)$. Le polynôme $Q_n = P_nT_n$ n'a pas de zéro de multiplicité impaire dans $]a,b[$: en effet ses zéros dans $]a,b[$ sont les éventuels zéros de P_n autres que les a_i avec la même multiplicité que dans P_n et les a_i avec la multiplicité qu'ils ont dans P_n augmentée de 1. Comme Q_n n'est pas nul on en déduit $\phi(Q_n) \neq 0$ soit $(T_n \mid P_n) \neq 0$ ce qui impose $T_n \notin E_{n-1}$ puisque $P_n \in E_{n-1}^{\perp}$. Ainsi $r = {}^\circ T_n \geqslant n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ le polynôme } P_n \text{ a } n \text{ zéros réels simples et ils sont tous dans }]a,b[.}$$

6.a) On sait que dans la division euclidienne $A = BQ + R$ de A par B on a soit ${}^\circ Q = {}^\circ A - {}^\circ B$ si ${}^\circ A \geqslant {}^\circ B$, soit $Q = 0$ et conventionnellement ${}^\circ Q = -\infty$ sinon, donc toujours ${}^\circ Q \leqslant {}^\circ A - {}^\circ B$ et ${}^\circ R < {}^\circ B$. Dans la division euclidienne $G = QP_n + R$ de G par P_n on a donc ${}^\circ Q \leqslant n-1$ et ${}^\circ R < n$, donc en effet :

$$\boxed{Q \text{ et } R \text{ sont dans } E_{n-1}.}$$

b) On remarque la propriété $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ L_i(a_j) = \delta_{i,j}}$ en notant $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker. Il en résulte que $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i\right)(a_j) = R(a_j)$ donc que le polynôme $R - \sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i$ a au moins les n racines $a_1, \ldots, a_n$. Comme il est de degré au plus $n-1$ il est nul et on a bien :

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i.}$$

c) On a $\phi(G) = \phi(QP_n + R) = (Q \mid P_n) + \phi(R) = \phi(R) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i\right) = \sum_{i=1}^{n} R(a_i)\phi(L_i)$ et la relation $G = QP_n + R$ entraîne $\forall i \in [\![1,n]\!],\ R(a_i) = G(a_i)$.

$$\boxed{\text{On a bien } \phi(G) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G(a_i) \text{ en posant } \forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = \phi(L_i).}$$

d) Appliquons la propriété précédente au polynôme L_j^2 qui est positif et non identiquement nul ; c'est légitime puisqu'il est de degré $2(n-1)$ donc dans E_{2n-1}. Comme $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ L_j^2(a_i) = \delta_{i,j}^2 = \delta_{i,j}$, on obtient $\lambda_j = \phi(L_j^2)$ et on en déduit d'après les propriétés de ϕ :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i > 0.}$$

Troisième partie

7. Il est immédiat que $\boxed{{}^\circ F_n = n}$. La formule de Leibniz s'écrit :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{C}_n^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big((x+1)^n\big) \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\big((x-1)^n\big) = n! \sum_{k=0}^{n} \left(\mathsf{C}_n^k\right)^2 (x+1)^{n-k}(x-1)^k \qquad \text{d'où}$$

$$\boxed{F_n(1) = 2^n n! \quad \text{et} \quad F_n(-1) = (-2)^n n!}$$

De même on calcule :

$$F_n'(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \mathsf{C}_{n+1}^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big((x+1)^n\big) \frac{\mathrm{d}^{n+1-k}}{\mathrm{d}x^{n+1-k}}\big((x-1)^n\big) = nn! \sum_{k=1}^{n} \mathsf{C}_{n+1}^k \mathsf{C}_{n-1}^{k-1} (x+1)^{n-k}(x-1)^{k-1} \qquad \text{d'où}$$

$$\boxed{F_n'(1) = n2^{n-1}(n+1)! \quad \text{et} \quad F_n'(-1) = n(-2)^{n-1}(n+1)!}$$

8. F_0 est un polynôme de degré 0 évidemment proportionnel à P_0 qui est aussi de degré 0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E_{n-1}$. On remarque que 1 et -1, qui sont racines d'ordre n de $(x^2-1)^n$, sont racines de $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\big((x^2-1)^n\big)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Calculons alors par parties le produit scalaire $(F_n \mid P)$:

$$\begin{aligned}
(F_n \mid P) = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((x^2-1)^n\big) P(x)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\big((x^2-1)^n\big)P(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\big((x^2-1)^n\big)P'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[-\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\big((x^2-1)^n\big)P'(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\big((x^2-1)^n\big)P''(x)\,\mathrm{d}x \\
&\ \vdots \\
&= \underbrace{\left[(-1)^{n-1}(x^2-1)^n P^{(n-1)}(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} + (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n P^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

puisque $P^{(n)}$ est le polynôme nul. On voit ainsi que $F_n \in E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ ce qui suffit pour affirmer que :

$$\boxed{F_n \text{ est proportionnel à } P_n \text{ défini en } \textbf{3.b)}}$$

puisque $E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ est une droite vectorielle qui contient déjà P_n.

9. On voit que le degré de $T(F_n)$ est le même que celui de F_n. En particulier il est évident que $T(F_0)$ est proportionnel à F_0.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E_{n-1}$. Calculons par parties le produit scalaire $(T(F_n) \mid P)$. C'est :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))\right) P(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))P(x)\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))P'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_n(x))\Big((x^2-1)P'(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[-F_n(x)\Big((x^2-1)P'(x)\Big)\right]_{-1}^{1}}_{=0} + \underbrace{\int_{-1}^{1}F_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((x^2-1)P'(x)\Big)\,\mathrm{d}x}_{=0}$$

puisque le degré de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((x^2-1)P'(x)\Big)$ est au plus $n-1$ et que d'après la question précédente F_n est dans $E_{n-1}^{\perp}$. Les polynômes F_n et $T(F_n)$ sont tous deux dans la droite vectorielle $E_n \cap E_{n-1}^{\perp}$ (et non nuls) $\boxed{\text{ils sont donc proportionnels}}$.

10. Il est aisé de calculer le coefficient de proportionnalité de la relation précédente en considérant les monômes dominants : si F_k est dominé par $\lambda_k x^k$, $(x^2-1)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_k$ l'est par $\lambda_k k x^{k+1}$ et donc $T(F_k)$ l'est par $\lambda_k k(k+1)x^k$. La relation obtenue à la question précédente s'écrit donc plus précisément :

$$\boxed{T(F_k) = k(k+1)F_k.}$$

Il en découle que les $\boxed{(n+1)\text{ réels distincts}}$ $0\times1,\ 1\times2,\ \ldots,\ n\times(n+1)$ sont valeurs propres de l'endomorphisme **induit** par T sur E_n qui est $\boxed{\text{de dimension } n+1}$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'induit de } T \text{ sur } E_n \text{ a } n+1 \text{ valeurs propres distinctes } \{k(k+1) \mid k \in [\![0,n]\!]\}\text{, et}\\ \text{le sous-espace propre associé à } k(k+1) \text{ est la droite vectorielle engendrée par } F_k.\end{array}}$$

11.a) Supposons qu'une fonction f développable en série entière sur un intervalle $]-\mathscr{R},\mathscr{R}[$ vérifie (1). On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\forall x \in\,]-\mathscr{R},\mathscr{R}[,\qquad f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k c_k x^{k-1}\\
(x^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k c_k x^{k+1} - \sum_{k=0}^{+\infty} k c_k x^{k-1}\\
T(f)(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)c_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)c_k x^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(kc_k-(k+2)c_{k+2})x^k.
\end{aligned}$$

Compte-tenu de l'unicité du développement en série entière l'égalité $T(f) = \gamma f$ équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)(kc_k - (k+2)c_{k+2}) = \gamma c_k$$

ou encore

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ c_{k+2} = \frac{1}{k+2}\left(k - \frac{\gamma}{k+1}\right)c_k.}$$

b) S'il existe un entier naturel n tel que $\gamma = n(n+1)$ la formule de récurrence précédente montre que $\forall i \in \mathbb{N},\ c_{n+2i} = 0$. Dans le cas contraire la même formule montre que le rapport $\dfrac{c_{k+2}}{c_k}$ tend vers 1.

• Étude de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ pour $c_0 \neq 0$

Il faut distinguer deux cas :

> ◇ Si γ est de la forme $2n(2n+1)$ pour un entier n, on a affaire au polynôme $Q_{2n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} c_{2p}x^{2p}$.
>
> On a alors $T(Q_{2n}) = 2n(2n+1)Q_{2n}$ ce qui entraîne que Q_{2n} est $\boxed{\text{proportionnel à } F_{2n}}$.
>
> ◇ Sinon la série numérique $\sum c_{2p}x^{2p}$ n'a aucun terme nul, et le rapport de deux termes consécutifs tend vers x^2, ce qui montre qu'elle converge absolument si $|x| < 1$ et qu'elle diverge grossièrement si $|x| > 1$. On peut donc conclure que $\boxed{\text{le rayon de convergence est 1}}$.

• Étude de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$ pour $c_1 \neq 0$

Il faut ici aussi distinguer deux cas :

> ◇ Si $\exists n \in \mathbb{N},\ \gamma = (2n+1)(2n+2)$, on a affaire au polynôme $Q_{2n+1} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} c_{2p+1}x^{2p+1}$. On a alors $T(Q_{2n+1}) = (2n+1)(2n+2)Q_{2n+1}$ ce qui entraîne que Q_{2n+1} est $\boxed{\text{proportionnel à } F_{2n+1}}$.
>
> ◇ Sinon la série n'a aucun coefficient nul, et un raisonnement analogue à celui fait pour la série $\sum c_{2p}x^{2p}$ montre que $\boxed{\text{le rayon de convergence est 1}}$.

c) L'équation (1) est en fait l'équation différentielle $(x^2-1)y''+2xy'-\gamma y = 0$. L'espace des solutions dans $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$ est de dimension deux d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. On en a une base formée des deux fonctions $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p}x^{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1}x^{2p+1}$ où les coefficients c_i sont définis par récurrence par $c_0 = c_1 = 1$ (par exemple) et $c_{k+2} = \dfrac{1}{k+2}\left(k - \dfrac{\gamma}{k+1}\right)c_k$. On a remarqué que si γ est de la forme $n(n+1)$ une de ces solutions est un polynôme.

d) La restriction à $]-1,1[$ d'une solution de (1) sur $[-1,1]$ est évidemment encore une solution de (1) qui admet des prolongements en 1^- et en -1^+. Montrons que seules les solutions polynômes (quand il y en a) ont cette propriété. Nous utiliserons pour cela deux lemmes.

Lemme 1 : si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe fixe à partir d'un certain rang, que la série $\sum \alpha_n$ diverge et que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x^n$ vaut 1, alors la limite en 1^- de sa somme est infinie.

Lemme 2 : si la suite u_n est à valeurs non nulles à partir d'un certain rang et que l'on a un développement asymptotique $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Supposons que γ ne soit pas de la forme $2n(2n+1)$ et que $c_0 \neq 0$. Posons $u_n = c_{2n}$. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{c_{2n+2}}{c_{2n}} = \frac{1}{2n+2}\left(2n - \frac{\gamma}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

et le lemme 2 montre la divergence de la série $\sum c_{2n}$.

On obtient de même la divergence de la série $\sum c_{2n+1}$ en appliquant le lemme 1 à la série de terme général $v_n = c_{2n+1}$ si γ n'est pas de la forme $(2n+1)(2n+2)$ et si $c_1 \neq 0$ puisqu'alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{c_{2n+3}}{c_{2n+1}} = \frac{1}{2n+3}\left(2n+1 - \frac{\gamma}{2n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Le lemme 1 appliqué avec la variable x^2 montre alors que les deux fonctions $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k}x^{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k+1}x^{2k+1}$ ont des limites infinies à la fois en 1^- et en -1^+ si ce ne sont pas des fonctions polynômes. Il en résulte qu'aucune combinaison linéaire non nulle de ces deux fonctions ne peut avoir de limite finie à la fois en 1^- et en -1^+.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de (1) dans } \mathcal{C}^2([-1,1]) \text{ est réduit à } \{0\} \text{ si } \gamma \text{ n'est pas de la forme } n(n+1) \text{ pour un entier naturel } n, \text{ et réduit à } \mathrm{Vect}(F_n) \text{ dans le cas contraire.}}$$

Preuve du lemme 1 : quitte à remplacer α_n par $-\alpha_n$ on peut supposer $\alpha_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang et $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\alpha_n = +\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Soit N tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\alpha_n > A$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow \alpha_n \geqslant 0$. On a alors pour $x \in]0,1[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N}\alpha_n x^n$ et comme cette fonction polynôme est continue en 1 où elle prend la valeur $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\alpha_n > A$, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $x \in]1-\epsilon, 1[\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\alpha_n x^n > A$ et par suite :

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall x,\ x \in]1-\epsilon,1[\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n > A.}$$

Preuve du lemme 2 : l'hypothèse faite entraîne que u_n est de signe fixe à partir d'un certain rang. Quitte à remplacer u_n par $-u_n$, on peut supposer qu'il s'agisse du signe plus.

Posons $v_n = \dfrac{1}{n\ln n}$ pour $n \geqslant 2$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ est non intégrable sur $[\mathrm{e}, +\infty[$: elle est de signe fixe et $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{X}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \ln(\ln X)$. Elle est monotone ; il en résulte que $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ diverge}}$. On calcule :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)$$

et donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

On a ainsi $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln n}$. On en déduit que la suite $\dfrac{v_n}{u_n}$ est décroissante à partir d'un certain rang et donc bornée. Ainsi $v_n = O(u_n)$ ce qui assure $\boxed{\text{la divergence de la série } \sum u_n}$.

⋆ ⋆
⋆