

Espaces de probabilité

1 Espaces probabilisés finis

Exercice 1. De combien de façons peut-on tirer, dans un jeu de 52 cartes, une main de 5 cartes :

1. qui comporte un brelan, mais ni carré ni full ? (un full est un ensemble de cinq cartes dont trois ont même valeur et les deux autres une même autre valeur).
2. qui ne comporte ni 2 cartes au moins de la même valeur, ni 5 cartes dont les valeurs se suivent, ni 5 cartes d'une même des 4 couleurs ?

Exercice 2. * On organise un tirage au sort entre n équipes de basket-ball de 1ère division et n équipes de 2ème division (chaque équipe joue un match, et un seul).

1. Calculer la probabilité p_n que tous les matchs opposent une équipe de 1ère division à une équipe de 2ème division.
2. Calculer la probabilité q_n que tous les matchs opposent deux équipes de la même division.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$.

Exercice 3. ♡ Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et A_1, \dots, A_n des événements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

Exercice 4. ♡ * Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer que pour tout événement A et B

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 5. ♡♡** Montrer la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = p_1 - p_2 + \dots + (-1)^{n-1} p_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k$$

où

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Exercice 6. * Un facteur possède n lettres adressées à n destinataires distincts. Il est totalement ivre et poste au hasard une lettre par boîte.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir la bonne répartition ?
2. Quelle est la probabilité qu'une lettre au moins arrive à la bonne adresse ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune lettre n'arrive à la bonne destination ?
4. Quel est le nombre d_n de manières différentes de poster les lettres de telle sorte qu'aucune n'arrive à destination ?

Exercice 7. * On dispose r boules à l'intérieur de n urnes (avec $r \leq n$), chaque urne pouvant contenir plusieurs boules.

Les répartitions possibles sont équiprobables.

a) Déterminer la probabilité de l'évènement :

A : « chaque urne contient au plus une boule »

b) Déterminer la probabilité de l'évènement :

B : « il existe une urne contenant au moins deux boules »

Exercice 8. ** Soient A et B deux événements indépendants de (Ω, \mathcal{T}, P) . On pose $Z = 1_A + 1_B$.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.

2. Montrer qu'il existe $k \in Z(\Omega)$ tel que $P(Z = k) \geq \frac{4}{9}$.

2 Tribus, limites supérieures, inférieures

Exercice 9. (*Image réciproque d'une tribu*) ♡ Soit X un ensemble, (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable et une application $f : X \rightarrow \Omega$. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur X .

Exercice 10. ** Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite symétrique si $A = -A$, où

$$-A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = -y\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de \mathbb{R} .

1. Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.

2. Montrer que \mathcal{A} est une tribu de \mathbb{R} .

3. Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{A}, f^{-1}(A) \in \mathcal{A}.$$

4. Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f^{-1}(X) \in \mathcal{A}.$$

5. Montrer que \mathcal{A} est la tribu image réciproque de la tribu grossière $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de \mathbb{R} par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

6. Décrire la tribu engendrée par $\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$.

Indication : On pourra commencer par montrer qu'elle est incluse dans \mathcal{A} ainsi que dans la tribu engendrée par les singletons.

Exercice 11. ♡♡** On souhaite montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.

Soit donc X un ensemble et \mathcal{A} une tribu au plus dénombrable sur X . On va montrer que \mathcal{A} est finie. Pour tout $x \in X$, soit

$$A(x) = \bigcap_{x \in A, A \in \mathcal{A}} A.$$

1. Montrer que $A(x) \in \mathcal{A}$.

2. Montrer que $A(x)$ est le plus petit élément de \mathcal{A} contenant x .

3. Montrer que $y \in A(x) \Rightarrow A(y) = A(x)$.

4. Soit x et x_0 deux éléments de X . Montrer que $A(x) = A(x_0)$ ou bien $A(x) \cap A(x_0) = \emptyset$.

5. Soit $\mathcal{E} = \{B \subset X \mid \exists x \in X, B = A(x)\}$. Montrer que \mathcal{A} est engendrée par \mathcal{E} .

6. En déduire que toute tribu au plus dénombrable est finie.

Exercice 12. * Soit Ω un ensemble. On appelle *limite supérieure* des A_n , et on note $\limsup_n A_n$ l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à une infinité de A_n .

On appelle *limite inférieure* des A_n , et on note $\liminf_n A_n$, l'ensemble des éléments de Ω qui appartiennent à tous les A_n , sauf un nombre fini d'entre eux.

1. Écrire les définitions de $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ avec les quantificateurs \forall et \exists . Les traduire en termes ensemblistes à l'aide de \cap et \cup .
2. Déterminer les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ dans les cas suivants :
 - (a) $A_n =]-\infty, n]$;
 - (b) $A_n =]-\infty, -n]$;
 - (c) $A_{2n} = A, A_{2n+1} = B$;
 - (d) $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

3 Probabilités conditionnelles

Exercice 13. Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p , c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n .
3. En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 14. Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ? On supposera que la probabilité d'être un tricheur parmi la population est x .

Exercice 15. ♡* On considère N coffres. Avec une probabilité p un trésor a été placé dans l'un de ses coffres, chaque coffre pouvant être choisi de façon équiprobable. On a ouvert $N - 1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre ?

Exercice 16. *** Soient A et B deux parties d'un ensemble Ω telles que

$$A \cap B \neq \emptyset, A \cap B^C \neq \emptyset, A^C \cap B \neq \emptyset, A^C \cap B^C \neq \emptyset.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le quadruplet (p, q, r, s) de $]0, 1[$, pour qu'il existe une probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que :

$$\left(\mathbb{P}(A|B), \mathbb{P}(A|B^C), \mathbb{P}(B|A), \mathbb{P}(B|A^C) \right) = (p, q, r, s).$$

On vérifiera que $(A \cap B, A \cap B^C, A^C \cap B, A^C \cap B^C)$ forme une partition de Ω et que donc il suffit de trouver des nombres $p_i \in [0, 1]$ de somme 1

$$(\mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(A \cap B^C), \mathbb{P}(A^C \cap B), \mathbb{P}(A^C \cap B^C)) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$$

Exercice 17. ♡♡* Une particule se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leq a \leq N$). A chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité p ($0 < p < 1, p \neq 1/2$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n , on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (i.e. s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

1. On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a , le processus s'arrête en 0.
 - (a) Que vaut u_0 ? u_N ?
 - (b) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.
 - (c) En déduire l'expression exacte de u_a .
2. On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a , le processus s'arrête en N . Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a .
3. Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 18. ** Soient $b, d, r \geq 0$.

Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On réalise l'expérience suivante :

- On tire une boule de l'urne au hasard uniforme, et on note sa couleur.
- On remet la boule dans l'urne, et on ajoute d boules de la même couleur.

On répète l'expérience autant de fois que l'on veut.

Soit $n \geq 1$. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche lors du n -ième tirage.

Espaces de probabilité

(Solutions)

Solution 1.

- La main est donc de la forme AAABC, où A, B, C sont des valeurs deux à deux distinctes.
On choisit tout d'abord la valeur A de la première carte parmi les 13 possibilités. On choisit 3 cartes de cette valeur parmi 4. Il y a $\binom{4}{3}$ possibilités.
On choisit ensuite deux autres valeurs parmi les 12 restantes. Il y a $\binom{12}{2} = 66$ possibilités. Il y a 4 cartes possibles pour chacune de ces deux valeurs, soit 16 possibilités.
Le nombre de mains est donc $13 \times 4 \times 66 \times 16 = 54912$.
- On cherche donc parmi cinq cartes ayant des valeurs distinctes les mains où les cartes ne se suivent pas, et celles qui ne sont pas d'une même couleur. Si on appelle A l'ensemble des mains où les valeurs sont distinctes, B l'ensemble de celles où les cartes se suivent, et C l'ensemble de celles où les cartes sont de même couleur, les ensembles B et C sont inclus dans A , et donc

$$|A \setminus (B \cup C)| = |A| - |B \cup C|.$$

D'autre part

$$|B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|.$$

Donc

$$|A \setminus (B \cap C)| = |A| + |B \cap C| - |B| - |C|.$$

Pour A , on choisit 5 valeurs parmi 13. Puis pour chaque valeur, on choisit une des quatre cartes de cette valeur, ce qui fait 4^5 possibilités. Donc

$$|A| = 4^5 \binom{13}{5} = 1317888.$$

Pour B , on choisit la première carte de la série, il y a 9 possibilités (lorsque la première carte est le 9, la dernière est le roi). Puis pour chaque valeur, on choisit une des quatre cartes de cette valeur, ce qui fait 4^5 possibilités. Donc

$$|B| = 4^5 \times 9 = 9216.$$

Pour C , on choisit la couleur, il y a 4 possibilités. Puis pour chaque couleur, on choisit 5 cartes de la couleur obtenue, ce qui fait $\binom{13}{5}$ possibilités. Donc

$$|C| = 4 \binom{13}{5} = 5148.$$

L'ensemble $B \cap C$ est constitué des mains dans lesquelles les cartes se suivent et sont de même couleur. On choisit la couleur, il y a 4 possibilités, et pour chaque couleur il y a 9 possibilités. Donc

$$|B \cap C| = 36.$$

Finalement

$$|A \setminus (B \cup C)| = 1317888 + 36 - 9216 - 5148 = 1303560.$$

Solution 2.

1. On va dénombrer les tirages au sort en tenant compte de l'ordre des matchs dans le tirage (c'est-à-dire que si l'on a 4 équipes A,B,C et D, les tirages (A-B,C-D) et (C-D,A-B) sont comptés comme deux tirages différents car ils n'ont pas le même premier match). On pourrait faire sans cette convention, on obtiendrait les mêmes résultats mais cela changerait un peu la façon de faire. Un tirage au sort se présente donc comme une n -liste de matchs, c'est-à-dire une n -liste de combinaisons 2 à 2 disjointes. Il y a $\binom{2n}{2}$ façons de choisir la première combinaison. Puis, cette combinaison choisie, il y a encore $\binom{2n-2}{2}$ façons de choisir la combinaison suivante. Et ainsi de suite... Ainsi, le nombre total de tirages au sort est :

$$\binom{2n}{2} \times \binom{2n-2}{2} \times \dots \times \binom{4}{2} \binom{2}{2} = \frac{(2n)!}{2^n}.$$

Parmi ces tirages, comptons ceux qui ne font s'opposer que des équipes de division distinctes. Pour le premier match, il y a n façons de choisir l'équipe de première division, et n façons de choisir l'équipe de deuxième division, soit n^2 choix. Pour le second match, il reste à choisir parmi $n-1$ équipes, et donc on a $(n-1)^2$ choix. Finalement, on obtient :

$$p_n = \frac{(n!)^2}{\frac{(2n)!}{2^n}} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

2. D'abord, si n est impair, un tel tirage au sort est clairement impossible, et $q_n = 0$. On suppose donc que n est pair et s'écrit $2k$. On choisit d'abord les k matchs parmi $2k$ qui opposent les matchs de 1ère division entre eux : cela fait $\binom{2k}{k}$ choix. Une fois ce choix réalisé, il faut compter le nombre de tirages à l'intérieur entre équipes de 1ère division. De la même façon que lorsqu'on a compté le nombre total de tirages au sort, on trouve $\frac{(2k)!}{2^k}$. De même pour les tirages au sort entre équipes de 2è division. On a donc :

$$q_{2k} = \frac{\binom{2k}{k}}{\binom{4k}{2k}}.$$

3. Ecrivons que :

$$(2n)! = 2^n(2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1 \times n!.$$

On a donc :

$$\binom{2n}{n} = 2^n \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1}{n!}.$$

Maintenant, en utilisant l'encadrement $2n-k-1 \leq 2n-k \leq 2n-k+1$, on obtient

$$2^n \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4 \times 2}{n!} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^n \frac{2n(2n-4)\dots 4 \times 2}{n!}$$

qui donne finalement le résultat demandé.

4. On a donc :

$$0 \leq p_n \leq \frac{n}{2^{n-1}},$$

qui prouve que p_n tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. De même pour q_n ...

Solution 3. On va procéder par récurrence sur n , le point clé étant la formule

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

La propriété est vraie si $n = 1$. Supposons-la vraie jusqu'au rang $n-1$, et prouvons-la au rang n . On pose $A = A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ et $B = A_n$. Alors, d'après la formule précédente

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B).$$

Maintenant, on utilise l'hypothèse de récurrence pour minorer $\mathbb{P}(A)$, et on utilise le fait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$, et on obtient

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - (n-2) + \mathbb{P}(A_n) - 1$$

ce qui est exactement le résultat voulu.

Solution 4. Le cas $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ vient du fait que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{A}) \leq \frac{1}{4}$.

Puis pour A et B est quelconque, on pose $A' = A \setminus A \cap B$ et

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A' \cup (A \cap B))\mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) - \mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B)|.$$

De plus, $\mathbb{P}(A \cap B)(1 - \mathbb{P}(B)) \leq \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(B))$ et $\mathbb{P}(A')\mathbb{P}(B) \leq (1 - \mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B)$. Comme la différence de deux réels positifs inférieure à $\frac{1}{4}$ reste inférieure à $\frac{1}{4}$, on en déduit le résultat.

Solution 5. On procède par récurrence, le cas $n = 1$ s'écrivant $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$. Posons $B = \bigcup_{k=1}^n A_k$ et appliquons la formule

$$\mathbb{P}(B \bigcup A_{n+1}) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1})$$

Par récurrence,

$$\mathbb{P}(B) = p_1 - p_2 + \dots + (-1)^{n-1} p_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} p_k$$

avec

$$p_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

et en posant $\tilde{A}_k = A_k \cap A_{n+1}$ pour $0 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n \tilde{A}_k\right) = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 + \dots + (-1)^{n-1} \tilde{p}_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \tilde{p}_k$$

et

$$\tilde{p}_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(\tilde{A}_{i_1} \cap \dots \cap \tilde{A}_{i_k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}).$$

Les p_k et les \tilde{p}_k et $\mathbb{P}(A_{n+1})$ au rang n permet de retrouver les p_k du rang $n + 1$ avec le bon signe.

Solution 6.

1. Il y a clairement $\frac{1}{n!}$ possibilités.

2. Notons A_i l'évènement la i -ème lettre arrive à bon port : $\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$.

On veut calculer la probabilité de l'évènement $E = \bigcup_{i=1}^n A_i$ et avec la formule de Poincaré on obtient :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, cette quantité tend vers $1 - e^{-1} \sim 0,632$.

Solution 7.

1. Il y a $\binom{n+r-1}{n-1}$ manière de mettre r boules indiscernables dans n urnes : on choisit $n-1$ délimiteurs parmi $n+r-1$.

Ensuite, Pour que chaque urne ait au plus une boule, on doit donc choisir les r urnes parmi n . la probabilité recherchée est donc

$$p = \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n+r-1}{n-1}} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{(n+r-1) \dots n} = \frac{(n-1) \dots (n-r+1)}{(n+r-1) \dots (n+1)}$$

2. C'est $1 - p$.

Si on considère les boules discernables, alors le nombre de cas possibles est n^r et de cas favorables $n(n-1) \dots (n-r+1)$. La probabilité n'est alors plus du tout la même.

Solution 8.

1. On a $Z(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}$.
2. On suppose par l'absurde que $\mathbf{P}(Z = 0) < \frac{4}{9}$, $\mathbf{P}(Z = 1) < \frac{4}{9}$ et $\mathbf{P}(Z = 2) < \frac{4}{9}$ et on pose

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1 + \alpha}{2}, \quad -1 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1 + \beta}{2}, \quad -1 \leq \beta \leq 1$$

On explicite les inégalités $\mathbf{P}(Z = k) < \frac{4}{9}$, $k = 0, 1, 2$, pour obtenir

$$1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta < \frac{16}{9}, \quad \frac{1}{9} < \alpha\beta \quad 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta < \frac{16}{9}.$$

Ainsi α et β ont même signe. Supposons sans perte de généralité que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans ce cas

$$0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \frac{1}{9} < \alpha\beta \quad \text{et} \quad 1 + (\alpha + \beta) + \alpha\beta < \frac{16}{9}.$$

Posons $u := \sqrt{\alpha\beta} > \frac{1}{3}$. On a

$$\frac{16}{9} > u^2 + (\alpha + \beta) + 1 \geq u^2 + 2\sqrt{\alpha\beta} + 1 = (u + 1)^2 > \frac{16}{9}$$

c'est absurde. Ainsi il existe $k \in Z(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Z = k) \geq \frac{4}{9}$.

Remarque. En considérant deux variables aléatoires U et V indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(\frac{2}{3})$ et en posant $A := (U = 1)$ et $B := (V = 1)$, on constate que $\mathbf{P}(Z = 0) = 1/9$, $\mathbf{P}(Z = 1) = 4/9$ et $\mathbf{P}(Z = 2) = 4/9$ ce qui montre que la constante $4/9$ est optimale

Solution 9. Fait en cours.**Solution 10.**

1. On pose $\mathcal{A}' = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$. Soit $B = A \cup -A \in \mathcal{A}'$, alors $-B = -A \cup A = A \cup -A = B$, donc $B \in \mathcal{A}$. Réciproquement, si $A \in \mathcal{A}$, alors $A = A \cup A = A \cup -A$ car $A = -A$ et donc $A \in \mathcal{A}'$. Par double inclusion, on a montré l'égalité.
2. Il est clair que $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. De plus, si $A \in \mathcal{A}$, alors $x \notin A$ ssi $-x \notin A$, et donc $-\bar{A} = \bar{A}$. Enfin, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, alors $A_n = A_n \cup (-A_n)$ et donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup -\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. D'après 1), $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
3. Ce sont les fonctions f telles que $x \mapsto |f(x)|$ est pair : supposons $f(-x) \neq f(x)$, alors $f^{-1}(\{f(x)\})$ ne contient pas $-x$, mais par hypothèse $-x \in f^{-1}(\{f(x), -f(x)\})$, donc $f(-x) = -f(x)$. Réciproquement, si $x \mapsto |f(x)|$ est paire, alors la propriété est vérifiée.
4. De même, ce sont les fonctions f paires : on sait d'après la question précédente que $x \mapsto |f(x)|$ est paire. Mais si $f(x) \neq f(-x)$, alors $f^{-1}(\{f(x)\})$ contient x , mais pas $-x$. On en déduit $f^{-1}(\{f(x)\}) \notin \mathcal{A}$, ce qui est exclu par hypothèse. On a montré $f(-x) = f(x)$ pour tout x . Réciproquement, si f est paire, on vérifie facilement $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), f^{-1}(X) \in \mathcal{A}$.
5. Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, alors $V^{-1}(X) = X \cup -X$ et d'après 1/, c'est la tribu \mathcal{A} .
6. On va montrer que c'est la tribu

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ tel que } X \text{ ou } \bar{X} \text{ est au plus dénombrable}\}.$$

Il est clair que la tribu \mathcal{D} engendrée par $\{a, -a\}$ contient \mathcal{C} car une tribu est stable par union dénombrable et par passage au complémentaire. Pour montrer que $\mathcal{D} = \mathcal{C}$, il reste à prouver que \mathcal{C} est une tribu. Il suffit de prouver que $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \text{ tel que } X \text{ ou } \bar{X} \text{ est au plus dénombrable}\}$ est une tribu. Elle contient \mathbb{R} car \emptyset est de cardinal nul. De plus, elle est par définition stable par passage au complémentaire. Soit $(X_n) \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$. Si tous les X_n sont au plus dénombrables, alors $\bigcup_n X_n$ est au plus dénombrable et donc appartient à \mathcal{X} . Et si l'un des X_{n_0} n'est pas dénombrable, alors \bar{X}_{n_0} est au plus dénombrable. Donc $\bigcup_n \bar{X}_n = \bigcap_n \bar{X}_n \subset \bar{X}_{n_0}$ est au plus dénombrable et appartient encore à \mathcal{C} . On a montré que \mathcal{C} est bien la plus petite tribu contenant les $\{-a, a\}$.

Solution 11. \mathcal{A} est supposée dénombrable.

1. Une tribu est stable par intersection dénombrable.
2. Puisque c'est l'intersection de toutes les parties qui contiennent x , elle contient x et si une partie de \mathcal{A} contient x , alors elle contient son intersection avec toutes les autres.
3. En fait l'idée est que si $B \subset A(x)$ une sous partie propre, alors elle est vide : on a $x \in B$, ou $x \in \overline{B}$ et donc $B = \emptyset$ ou $\overline{B} = \emptyset$.
4. Conséquence de la question précédente et donc les $A(x)$ forment une partition (dénombrable).
5. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup_{x \in A} A(x)$ qui est une union au plus dénombrable donc dans la tribu engendrée par \mathcal{E} . L'inclusion inverse étant déjà vue, on a égalité.
6. Soit $I = \{A(x), x \in A\}$. L'ensemble I est au plus dénombrable et \mathcal{A} est en bijection $\mathcal{P}(I)$. Or, si I est fini, $\mathcal{P}(I)$ aussi et si I est dénombrable, alors $\mathcal{P}(I)$ ne l'est plus. Ce qui termine la preuve.

Dans les exercices au programme, trouver la tribu engendrée par une classe \mathcal{C} de parties d'un ensemble E se fait généralement en ajoutant à \mathcal{C} les unions dénombrables et les complémentaires des parties de \mathcal{C} . Si l'on obtient ainsi une tribu, on a bien trouvé la tribu engendrée par \mathcal{C} .

Manque de chance, cela ne marche pas toujours, notamment pour le cas de la tribu borélienne sur \mathbb{R} . Si l'on procède de la sorte en partant des intervalles réels, on ne tombe en effet pas sur une tribu. Il faut en fait itérer ce processus par récurrence transfinie pour obtenir la tribu des boréliens.

Cela explique pourquoi il est impossible de fournir une description explicite complète des boréliens de \mathbb{R} . On peut montrer que la tribu borélienne sur \mathbb{R} a la puissance du continu, ce qui montre l'existence de non-boréliens (car $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a une puissance strictement supérieure à celle du continu).

Solution 2.

Solution 13. 1. On note I_n l'événement : "l'information après n transmissions est correcte". D'après la formule des probabilités totales, on sait que

$$P(I_{n+1}) = P(I_{n+1}|I_n)P(I_n) + P(I_{n+1}|\overline{I_n})P(\overline{I_n}).$$

Mais, $P(I_{n+1}|I_n) = p$ (l'information doit être transmise correctement) et $P(I_{n+1}|\overline{I_n}) = 1 - p$ (l'information doit être mal transmise). On en déduit que

$$p_{n+1} = p \times p_n + (1 - p) \times (1 - p_n) = (2p - 1)p_n + (1 - p).$$

2. On a une suite arithmético-géométrique. Sa limite possible l vérifie

$$l = (2p - 1) \times l + (1 - p) \iff l = 1/2.$$

On pose alors $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ et on vérifie que (u_n) est géométrique de raison $(2p - 1)$. En effet,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p - 1)p_n + (1 - p) - \frac{1}{2} = (2p - 1) \left(p_n - \frac{1}{2} \right).$$

On en déduit $u_n = (2p - 1)^n u_0$ avec $u_0 = p_0 - 1/2 = 1/2$. On conclut que

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p - 1)^n.$$

3. On distingue alors trois cas :

- Si $p = 1$, l'information est transmise presque sûrement correctement, et $p_n = 1$ pour tout entier n .
- Si $p = 0$, l'information est presque sûrement mal transmise, et $p_{2n} = 1$, $p_{2n+1} = 0$ pour tout entier n .
- Si $p \in]0, 1[$, alors $|2p - 1| < 1$ et donc (p_n) converge vers $1/2$. On n'a plus de traces de l'information initiale!

Solution 14. Soit x la proportion de tricheurs dans la population. On note respectivement P, F, H, T les événements “le joueur obtient pile”, “le joueur obtient face”, “Le joueur est honnête”, “le joueur est un tricheur”. Il semble raisonnable de convenir que $\mathbb{P}(P|H) = 1/2$ et $\mathbb{P}(F|H) = 1/2$ et $\mathbb{P}(P|T) = 1$ (un tricheur fait vraiment ce qu’il veut !). On cherche donc $\mathbb{P}(T|P)$. De la formule de Bayes, on déduit :

$$\mathbb{P}(T|P) = \frac{\mathbb{P}(P|T)\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(P|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(P|H)\mathbb{P}(H)} = \frac{x}{x + 1/2(1-x)} = \frac{2x}{x+1}.$$

Solution 15. Considérons l’événement A : un trésor est placé dans l’un des coffres. Par hypothèse $\mathbb{P}(A) = p$. Considérons l’événement A_i : un trésor est placé dans le coffre d’indice i . Par hypothèse $\mathbb{P}(A_i) = p$ et puisque les événements A_i sont deux à deux incompatibles

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{p}{N}$$

On doit donc calculer

$$\mathbb{P}(A_n | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1})$$

Mais

$$\mathbb{P}(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) = \frac{p(N-1)}{N}$$

et

$$\mathbb{P}(A_n \cap \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}) = \mathbb{P}(A_n) = \frac{p}{N}$$

donc

$$\mathbb{P}(A_n | \bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1}) = \frac{p}{N - (N-1)p}$$

Solution 16. Si $(E_i)_{i \in I}$ est une partition de ω et $(p_i)_{i \in I}$ une suite de réels > 0 , telle que $\sum_{i \in I} p_i = 1$, alors

il existe une probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que $\mathbb{P}(E_i) = p_i$ pour I de cardinal dénombrable (la preuve est la même que pour la version atomique) : Pour chaque E_i on considère une probabilité \mathbb{P}_i de loi $(x^i, p_{x^i})_{x^i \in E_i}$ et on pose

$$\tilde{p}_{x^i} = p_{x^i} p_i;$$

la loi $(x^i, \tilde{p}_{x^i})_{x^i \in E_i, i \in I}$ est un germe de probabilité sur Ω .

De plus,

$$\Omega = (A \cup A^c) \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$$

ce qui détermine une partition de Ω .

L’exercice est donc équivalent à déterminer l’existence de $(p_i \in \mathbb{R}_+, i \in \{1, \dots, 4\})$ de somme 1 avec

$$\mathbb{P}(A \cap B) = p_1, \mathbb{P}(A \cap B^c) = p_2, \mathbb{P}(A^c \cap B) = p_3, \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = p_4.$$

On pose

$$\mathbb{P}(A) = X, \mathbb{P}(B) = Y$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(A \cap B)} &= \frac{\mathbb{P}(A^c|B)}{\mathbb{P}(A|B)} = \frac{p_3}{p_1} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1 = P \Rightarrow p_3 = Pp_1 \\ \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B^c)}{\mathbb{P}(A \cap B^c)} &= \frac{\mathbb{P}(A^c|B^c)}{\mathbb{P}(A|B^c)} = \frac{p_4}{p_2} = \frac{1-q}{q} = \frac{1}{q} - 1 = Q \Rightarrow p_4 = Qp_2 \\ \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(A \cap B)} &= \frac{\mathbb{P}(B^c|A)}{\mathbb{P}(B|A)} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1-r}{r} = \frac{1}{r} - 1 = R \Rightarrow p_2 = Rp_1 \\ \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B^c)}{\mathbb{P}(A^c \cap B)} &= \frac{\mathbb{P}(B^c|A^c)}{\mathbb{P}(B|A^c)} = \frac{p_4}{p_3} = \frac{1-s}{s} = \frac{1}{s} - 1 = S \Rightarrow p_4 = Sp_3 \end{aligned}$$

avec $P, Q, R, S \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous devons donc résoudre le système

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Q & 0 & 1 \\ -R & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice Δ ci-dessus a pour déterminant $RQ - PS$ (on développe suivant la première colonne, par exemple).

Comme on cherche une solution telle que $p_i > 0$, il faut donc que ce déterminant soit non nul.

Montrons que la condition est en fait suffisante :

1. Si l'un des p_i est nul, ils le sont tous (on utilise $PQRS \neq 0$). Par exemple, si $p_1 = 0$, les lignes 1 et 3 donnent $p_3 = p_2 = 0$ et la dernière ligne donne $p_4 = 0$.
2. Comme les p_i sont non nuls, ils sont de même signe et le noyau est de dimension 1 : donc (p_1, p_2, p_3, p_4) est défini à un scalaire près. quitte à diviser par la somme des p_i , on peut supposer que cette somme vaut 1.
3. Si (p_1, p_2, p_3, p_4) est cette solution, alors par construction, (p, q, r, s) correspond aux probabilités conditionnelles de l'énoncé, ce qui permet de conclure.

Solution 17.

1. (a) Par définition, on a $u_0 = 1$ (le processus commence en 0, il s'arrête immédiatement, en 0), et $u_N = 0$ (le processus commence en N , il s'arrête aussitôt, en N).
- (b) On note A l'événement : "Partant de a , le processus s'arrête en 0", B l'événement : "Partant de a à l'instant 0, à l'instant 1, la particule est en $a + 1$ ", et C l'événement : "Partant de a à l'instant 0, à l'instant 1, la particule est en $a - 1$ ". Par la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C).$$

Maintenant, puisqu'on part à l'instant $t = 0$ de a , on a $P(B) = p$ et $P(C) = q$. D'autre part, si la particule est à l'instant 1 en $a + 1$, la probabilité que le processus s'arrête en 0 vaut u_{a+1} . On a donc : $P(A|B) = u_{a+1}$, et de même $P(A|C) = u_{a-1}$. On en déduit la formule de récurrence :

$$u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}.$$

- (c) Pour a allant de 1 à $N - 1$, la suite (u_a) vérifie la formule de récurrence :

$$u_{a+1} = \frac{1}{p}u_a - \frac{q}{p}u_{a-1}.$$

L'équation caractéristique de cette récurrence est :

$$r^2 - \frac{1}{p}r + \frac{q}{p} = 0.$$

Cette équation du second degré admet deux solutions distinctes,

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = \frac{q}{p}$$

(remarquer ici l'utilisation de l'hypothèse $p \neq 1/2$ qui permet d'affirmer que les deux racines sont distinctes). Il existe donc des réels λ et μ tels que, pour tout a dans $\{0, \dots, N\}$, on ait :

$$u_a = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

Utilisant que $u_0 = 1$ et $u_N = 0$, on obtient :

$$u_a = \frac{q^N}{q^N - p^N} + \frac{p^N}{p^N - q^N} \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

2. Le même raisonnement prouve que :

$$v_a = pv_{a+1} + qv_{a-1}.$$

La résolution de cette récurrence donne :

$$v_a = \frac{p^N}{p^N - q^N} + \frac{p^N}{q^N - p^N} \left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

3. On vérifie aisément que $u_a + v_a = 1$. Ceci signifie que, presque sûrement, le processus va s'arrêter.

Solution 18. On pose B_i l'événement "une boule blanche est tirée au i -ème tirage".

On pose R_i l'événement "une boule rouge est tirée au i -ème tirage".

Au premier tirage, on a $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{b+r}$.

Pour le second tirage, on calcule :

$$\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{b+d}{b+d+r} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+d+r} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$

On va démontrer par récurrence sur $n \geq 1$ que $\mathbb{P}(B_n) = \frac{b}{b+r}$.

Initialisation : Ok.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que le résultat est vrai pour $n \geq 1$.

On ne peut pas utiliser $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n)$ dans nos calculs, car on ne sait pas exactement combien de boules sont contenues dans l'urne quand B_n est vrai (l'événement B_n ne donne pas le nombre de boules dans l'urne). A part B_1 .

Regardons $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_1)$. Après 1 tirage, si B_1 est vrai, on a $b+d$ boules blanches et r boules rouges. Pour arriver à $n+1$ tirages, il reste donc n tirages à faire.

Cela revient exactement à faire n tirages en commençant avec $b' = b+d$ boules blanches et $r' = r$ boules rouges.

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_n) = \frac{b'}{b'+r'} = \frac{b+d}{b+d+r}$.

De même, regardons $\mathbb{P}(B_{n+1}|R_1)$. Après 1 tirage, si R_1 est vrai, on a b boules blanches et $r+d$ boules rouges. Pour arriver à $n+1$ tirages, il reste donc n tirages à faire.

Cela revient exactement à faire n tirages en commençant avec $b' = b$ boules blanches et $r' = r+d$ boules rouges.

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $\mathbb{P}(B_{n+1}|B_1) = \frac{b'}{b'+r'} = \frac{b}{b+d+r}$.

On obtient ainsi :

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_{n+1}|R_1)\mathbb{P}(R_1) = \frac{b+d}{b+d+r} \times \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+d+r} \times \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}.$$