Kdo du 17/12/2024

Séries entières & équations différentielles
(d'après CCP TSI 2013, épreuve Maths 1)

Soit (E) l'équation différentielle

$$x^2y''(x) - x(2x^2-1)y'(x) - (2x^2+1)y(x) = 0.$$

1. Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle (E).
2. Pour quelle(s) valeurs(s) du réel α la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est-elle une solution, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, de l'équation différentielle (E) ?
3. Résoudre, sur l'intervalle $]0,+\infty[$, l'équation différentielle (E). (De deux manières : en faisant varier la constante & en utilisant une série entière.)

---

1. (a) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et $\forall x \in]-R,+R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(2x^2-1)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - (2x^2+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \quad -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)a_n + na_n - a_n\right]x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \\
&\iff \quad -a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n-1)(n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-2}\right]x^n = 0 \\
&\iff \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2,\ (n+1)a_n = 2a_{n-2} \end{cases} \quad \text{par unicité du DSE} \\
&\iff \quad \begin{cases} \forall p \geq 0,\ a_{2p} = 0 \\ \forall p \geq 1,\ (p+1)a_{2p+1} = a_{2p-1} \end{cases} \\
&\iff \quad \forall p \geq 0,\ a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{a_1}{(p+1)!}.
\end{aligned}$$

(b) Soit $x \neq 0$ et $u_p = \dfrac{x^{2p+1}}{(p+1)!}$: $\dfrac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = \dfrac{1}{(p+2)(p+3)}x^2 \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc le rayon de convergence de cette série entière est $R = +\infty$ d'après le critère de d'Alembert.

2. Soient un réel α la fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$. Cette fonction g est deux fois dérivable et $\forall x > 0,\ g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et $g''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. Pour tout $x > 0$, $x^2g''(x) - x(2x^2-1)g'(x) - (2x^2+1)g(x) = x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - x(2x^2-1)\alpha x^{\alpha-1} - (2x^2+1)x^\alpha = (\alpha^2-1)x^\alpha - 2(\alpha+1)x^{\alpha+2} = (\alpha+1)x^\alpha\left[(\alpha-1)-2x^2\right]$. Cette quantité est nulle pour tout $x > 0$ *ssi* $\alpha = -1$.

3. (a) Première méthode : on fait varier la constante.

On cherche la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$ sous la forme $y(x) = k(x)\cdot\dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad x^2\left[k''(x)\frac{1}{x} - 2k'(x)\frac{1}{x^2} + k(x)\frac{2}{x^3}\right] - x(2x^2-1)\left[k'(x)\frac{1}{x} - k(x)\frac{1}{x^2}\right] - (2x^2+1)k(x)\frac{1}{x} = 0 \\
&\iff \quad xk''(x) = (2x^2+1)k'(x) \\
&\iff \quad \ell'(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)\ell(x) \quad \text{en notant } \ell(x) = k'(x) \\
&\iff \quad \ell(x) = L\cdot x\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{où } L \text{ est une constante} \\
&\iff \quad k(x) = L\cdot\mathrm{e}^{x^2} + K \quad \text{où } K \text{ est une constante.}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{y \text{ est une solution }]0,+\infty[\text{ de } (E) \text{ si, et seulement si, } \exists (K,L) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ y(x) = \dfrac{L \cdot \mathrm{e}^{x^2} + K}{x}.}$

(b) Deuxième méthode : on utilise les solutions trouvées aux questions précédentes. Sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (pourquoi ?), (E) est une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre. On sait que sa solution générale est de la forme : $x = K\varphi_1 + L\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont deux solutions linéairement indépendantes.

D'une part, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(p+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x^2)^{p+1}}{(p+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$.

D'autre part, la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ est aussi une solution sur $]0,+\infty[$.
Ces deux solutions sont linéairement indépendantes, donc

$$\boxed{y \text{ est une solution }]0,+\infty[\text{ de } (E) \text{ si, et seulement si, } \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ y(x) = A \cdot \frac{1}{x} + B \cdot \frac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}.}$$