

Chapitre X Variables aléatoires

Table des matières

X.1	Variables aléatoires discrètes	83
X.2	La loi binomiale	84
X.3	La loi géométrique	85
X.4	La loi de Poisson	86
X.5	Espérance	87
X.6	Variance et écart-type	89
X.7	Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev	90
X.8	Série génératrice	91

X.1 VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

DÉFINITION 1 1. Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Une **variable aléatoire discrète** (*vad*) est une fonction X définie sur l'univers Ω telle que :

- (i) l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X est fini ou dénombrable ;
 - (ii) pour chaque valeur $a \in X(\Omega)$ prise par X , l'ensemble $X^{-1}(\{a\})$ est un événement, noté $(X = a)$.
Autrement dit : $\forall a \in X(\Omega), (X = a) = X^{-1}(\{a\}) \in \mathcal{A}$.
2. Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une *vad*. La **loi de probabilité** de X est la fonction

$$X(\Omega) \longrightarrow [0, 1], \quad a \mapsto P(X = a).$$

L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la *vad* X peut ne pas être, ou être inclus dans \mathbb{R} : on dira alors que X est une variable aléatoire réelle discrète (*vard*).

EXERCICE 2 — On lance deux dés : c'est une expérience aléatoire, quel est son univers Ω ? Soit X la *vad* définie par la somme des deux dés. Préciser $X(\Omega)$ et, pour chaque $a \in X(\Omega)$, l'événement $(X = a)$. On suppose chaque résultat équiprobable : déterminer la loi de probabilité de X .

REMARQUE 3 — 1. Rappelons que (définition) : $a \in f^{-1}(A) \iff f(a) \in A$ et que (propriétés) :

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i).$$

2. Si $X(\Omega)$ est un ensemble :

- fini de cardinal $n + 1$, alors on peut écrire $X(\Omega) = \{a_0, \dots, a_n\} = \{a_i, i \in I\}$ où $I = \llbracket 0, n \rrbracket$;
- dénombrable, alors $X(\Omega) = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\} = \{a_i, i \in I\}$, où $I = \mathbb{N}$.

Dans les deux cas, la famille $(X = a_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements (c'est une union certaine et disjointe), donc

$$\sum_{i \in I} P(X = a_i) = 1.$$

EXEMPLE 4 — On lance indéfiniment une pièce qui tombe, de manière équiprobable, sur Pile ou Face : l'univers de cette expérience aléatoire est l'ensemble $\Omega = \{\text{Pile}; \text{Face}\}^{\mathbb{N}^*}$ des suites de Pile et de Face. On mesure le temps d'attente T du premier Pile : c'est la variable aléatoire discrète définie par

$$T(\omega) = \begin{cases} \infty & \text{si } \omega \text{ est une suite de Face;} \\ \text{le rang du premier Pile dans la suite } \omega & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ est dénombrable et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(T = n)$ contient exactement l'infinité des suites commençant par $n - 1$ Face suivi(s) de 1 Pile. L'événement $(T = \infty)$ n'est pas impossible, la famille $(T = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est donc pas un système complet d'événements. Mais c'est un système quasi complet d'événements car l'événement $(T = \infty)$ est presque impossible d'après l'exercice 11 du chapitre VI. On pourra donc utiliser la formule des probabilités totales : pour tout événement A ,

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T = n) \cdot P(A|T = n).$$

PROPOSITION 5

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et une vad $X : \Omega \rightarrow E$ à valeurs dans un ensemble E .

- (i) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ est un événement noté aussi $(X \in A)$.
- (ii) L'application $P_X : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1]$, $A \mapsto P(X \in A)$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$.

Preuve —

- (i) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E : l'ensemble $X^{-1}(A) = X^{-1}(A \cap X(\Omega)) = \bigcup_{a \in A \cap X(\Omega)} X^{-1}(\{a\})$ est une union finie ou dénombrable d'événements d'après la définition 1. C'est donc un événement d'après la définition d'une tribu.
- (ii) D'après la définition 6 du chapitre VI, P_X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(E, \mathcal{P}(E))$ car :
 - $P_X(E) = P(X^{-1}(E)) = 1$ car $X^{-1}(E) = \Omega$ est l'événement certain ;
 - si $\bigcup_{i \in I} A_i$ est une union disjointe et dénombrable de parties de E , alors $X^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(A_i)$ est une union disjointe et dénombrable, d'où $P_X\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i \in I} X^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i \in I} P(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i \in I} P_X(A_i)$.

□

En particulier, si la vad est à valeurs dans \mathbb{N} , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(X = n) = (X \in \{n\}) = X^{-1}(\{n\}) \quad \text{et on note } (X \leq n) \text{ l'événement } (X \in \llbracket 0, n \rrbracket) = X^{-1}(\llbracket 0, n \rrbracket).$$

EXERCICE 6 — Une boîte contient N boules numérotées de 1 à N . On tire n fois une boule au hasard en la remettant à chaque fois dans la boîte. Soit X la vad égale au maximum des numéros tirés. Déterminer la loi de probabilité de X .

X.2 LA LOI BINOMIALE

DÉFINITION 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) et on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$.

Une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p \in]0, 1[$ est une expérience aléatoire qui peut donner deux résultats : un « succès » S avec une probabilité p ou un « échec » E avec la probabilité $q = 1 - p$.

PROPOSITION 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soit X la *vad* égale au nombre de succès parmi n épreuves de Bernoulli de paramètre p . Si ces épreuves sont indépendantes, alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Preuve — Un résultat est une n -liste formée de S (succès) et de E (échec). L'événement $(X = k)$ contient les n -listes avec k fois S et $n - k$ fois E : le nombre de n -listes est donc $\binom{n}{k}$ et la probabilité de chaque n -liste est $p^k \cdot q^{n-k}$ car les épreuves sont indépendantes. Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. \square

EXEMPLE 9 — 1. Si $n = 1$, alors $X \sim \mathcal{B}(1, p)$:

$$X(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket \quad , \quad P(X = 0) = \binom{1}{0} \cdot p^0 \cdot q^1 = q \quad \text{et} \quad P(X = 1) = \binom{1}{1} \cdot p^1 \cdot q^0 = p.$$

2. On lance n fois une pièce (c'est une expérience aléatoire). Si la pièce est équilibrée, alors la variable aléatoire discrète X égale au nombre de Pile obtenus suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

3. On tire au hasard **avec remise** n boules dans une boîte contenant une proportion p de boules blanches (c'est une expérience aléatoire). La variable aléatoire discrète X égale au nombre de boules blanches tirées suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

EXERCICE 10 — Montrer que, si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors la variable aléatoire $n - X$, qui mesure le nombre d'échecs, suit aussi une loi binomiale : $n - X \sim \mathcal{B}(n, q)$.

X.3 LA LOI GÉOMÉTRIQUE

DÉFINITION 11

Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On dit qu'une variable aléatoire discrète T **suit une loi géométrique** de paramètre p et on note $T \sim \mathcal{G}(p)$ si

$$T(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in T(\Omega), \quad P(T = k) = p \cdot q^{k-1}.$$

On vérifie que $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.

Expérience aléatoire : on répète indéfiniment une épreuve de Bernoulli. On dit que le **temps d'attente** du premier succès est $k \in \mathbb{N}^*$ si le premier succès arrive au k -ième essai. Par exemple $T(EES \dots) = 3$.

Ce temps d'attente est une variable aléatoire discrète T et $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ (pas tout à fait : voir l'exemple 4). La proposition suivante montre que, si les épreuves de Bernoulli sont indépendantes, alors la loi du temps d'attente est une loi géométrique.

PROPOSITION 12

Soit $p \in]0, 1[$. Soit T la *vad* égale au temps d'attente du premier succès lors d'une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p . Si ces épreuves sont indépendantes, alors $T \sim \mathcal{G}(p)$.

Preuve — L'événement $(X = k)$ est l'intersection $E_1 \cap \dots \cap E_{k-1} \cap \overline{E_k}$, où E_k est l'événement « La k -ième épreuve de Bernoulli réalise un échec », de probabilité q . Or les épreuves de Bernoulli sont indépendantes, donc $P(X = k) = pq^{k-1}$. \square

EXERCICE 13 — Soit X une *va* qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer $P(X > n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

X.4 LA LOI DE POISSON

DÉFINITION 14

Soit un réel $\lambda > 0$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X **suit une loi de Poisson** de paramètre λ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = 1$.

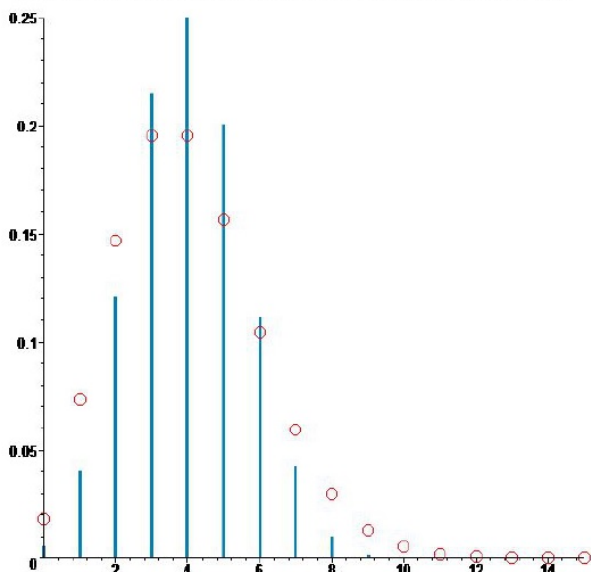
La loi de Poisson a été introduite en 1838 par Siméon Denis Poisson (1781–1840). Elle permet d'approximer une loi binomiale grâce à la proposition suivante.

PROPOSITION 15

Soient un réel $\lambda > 0$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, avec $p_n \in]0, 1[$. Si $n \cdot p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Loi de Poisson P(lambda) avec lambda=4 et loi binomiale B(n,p) avec n=10 et p=4/10



Loi de Poisson P(lambda) avec lambda=4 et loi binomiale B(n,p) avec n=100 et p=4/100

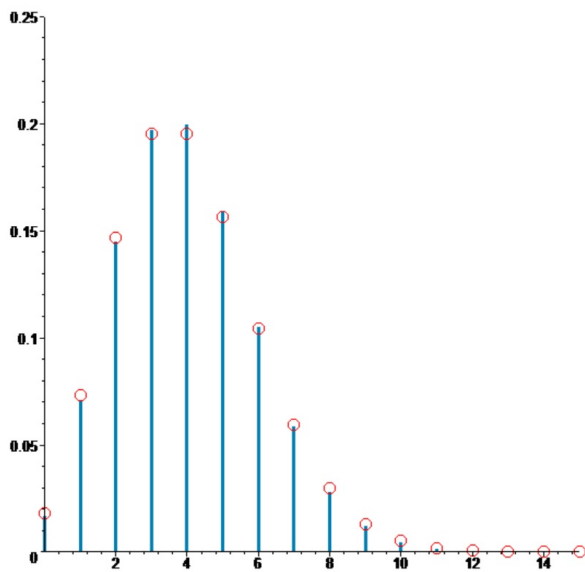


FIGURE X.1 – CONVERGENCE DE LA LOI BINOMIALE VERS LA LOI DE POISSON

Preuve —

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n^k}{k!} \underbrace{\left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right]}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} p_n^k (1-p_n)^{n-k}. \end{aligned}$$

Or $(np_n)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda^k$ et la forme indéterminée $(1-p_n)^{n-k}$ s'écrit $e^{(n-k) \ln(1-p_n)}$.

Or $n - k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n$ et $\ln(1 - p_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -p_n$ car $p_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$. D'où $(n - k) \ln(1 - p_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -np_n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} -\lambda$. Donc $P(X_n = k) \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. \square

REMARQUE 16 — L'expérience montre que la loi de Poisson est suivie par de nombreuses variables aléatoires telles que :

- le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique pendant une durée T ;
- le nombre de connexions à un serveur web pendant une durée T ;
- le nombre de clients qui passent à la caisse d'un magasin pendant une durée T ;
- le nombre d'atomes qui se désintègrent dans un échantillon radioactif pendant une durée T .

On peut comprendre pourquoi grâce au modèle suivant : on découpe un intervalle de temps de durée T en un nombre n d'intervalles de durée $\Delta t = \frac{T}{n}$ et on suppose que la probabilité p_n de réalisation d'un événement pendant la durée Δt est proportionnelle à la durée Δt : $p_n = \lambda \Delta t = \lambda \frac{T}{n}$, où le paramètre $\lambda > 0$ est donc la probabilité de réalisation d'un événement par unité de temps.

On fait l'hypothèse que les événements sont des **événements rares** : si n est assez grand, alors l'événement se réalise au plus une fois pendant la petite durée $\Delta t = \frac{T}{n}$. Autrement dit : cet événement, qui se réalise (succès) ou pas (échec), est une épreuve de Bernoulli.

Si (deuxième hypothèse) les événements sont indépendants (par exemple : pas de réaction en chaîne dans l'échantillon radioactif), alors l'expérience aléatoire est équivalente à la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes. La probabilité de succès pendant une épreuve est p_n et la loi de probabilité est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$.

X.5 ESPÉRANCE

DÉFINITION 17

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle discrète (*vard*) telle que $X(\Omega) = \{a_i, i \in I\} \subset \mathbb{R}$. Si la série $\sum a_i P(X = a_i)$ converge absolument, alors :

- (i) on dit que X est **d'espérance finie** ou que X possède une espérance ou que $X \in L^1$;
- (ii) cette espérance, notée $E(X)$, est le nombre réel $E(X) = \sum_{i \in I} a_i P(X = a_i)$.

Si la *vard* X mesure le gain d'un joueur, alors l'espérance est la somme que ce joueur peut « espérer » gagner.

REMARQUE 18 —

1. Dans la définition de l'espérance, on veut que la valeur de l'espérance ne dépende pas de l'ordre dans lequel on indexe les valeurs a_i afin de les sommer. C'est le cas si la série converge absolument.
2. Une *vard* peut ne pas être d'espérance finie :
si $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{6}{\pi^2 n^2}$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ et la série $\sum np_n$ diverge.
3. Si $X(\Omega)$ est fini, alors la variable aléatoire X est nécessairement d'espérance finie car $E(X)$ est alors une somme finie.
4. Si la *vard* X est bornée, alors elle est nécessairement d'espérance finie.

Preuve — Soit M un majorant de la suite des $|a_n|$. Pour tout $n \in I$, $|a_n P(X = a_n)| \leq MP(X = a_n)$. Or la série $\sum MP(X = a_n) = M \sum P(X = a_n)$ converge (vers M).

Donc la série $\sum a_n P(X = a_n)$ converge absolument. \square

5. L'espérance est linéaire : si une v.a.d. X est d'espérance finie, alors $\alpha X + \beta$ aussi et

$$E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$$

pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Preuve — Notons a_n la suite des valeurs prises par la v.a.d. X . Par hypothèse, la série $\sum |a_n P(X = a_n)|$ converge. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |\alpha a_n + \beta| \leq |\alpha| \cdot |a_n| + |\beta|$ et les séries $\sum |\alpha| \cdot |a_n| P(X = a_n) = |\alpha| \sum |a_n| P(X = a_n)$ et $\sum |\beta| P(X = a_n) = |\beta| \sum P(X = a_n)$ convergent, d'où la série $\sum (\alpha a_n + \beta) P(X = a_n)$ converge absolument. De plus $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta) P(X = a_n) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(X = a_n) + \beta \sum_{n=0}^{\infty} P(X = a_n) = \alpha E(X) + \beta$. \square

6. Si X est d'espérance finie, alors $|X|$ aussi et $|E(X)| \leq E(|X|)$ par l'inégalité triangulaire.

7. L'espérance est croissante : soient X et Y deux v.a.d. d'espérances finies.

Si $X \leq Y$ (i.e. si $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$), alors $E(X) \leq E(Y)$.

EXERCICE 19 — Montrer que :

1. si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors X est d'espérance finie et $E(X) = n \cdot p$.

On pourra utiliser la petite formule : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq k$, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.

2. si $T \sim \mathcal{G}(p)$, alors T est d'espérance finie et $E(T) = \frac{1}{p}$.

3. si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors X est d'espérance finie et $E(X) = \lambda$.

PROPOSITION 20

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une v.a.d. telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$:

X est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum P(X \geq n)$ converge. Et alors

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

Preuve —

— Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n kP(X = k)$ et $T_n = \sum_{k=0}^n P(X > k)$. Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = T_{n-1} - nP(X > n). \quad (*)$$

C'est vrai pour $n = 1$ car $S_1 = P(X = 1) = P(X > 0) - P(X > 1) = T_0 - P(X > 1)$.

Supposons la propriété (*) vraie pour n . Alors elle est vraie pour $n + 1$ car

$$\begin{aligned} S_{n+1} = S_n + (n+1)P(X = n+1) &= T_{n-1} - nP(X > n) + (n+1)P(X = n+1) \\ &= T_n - (n+1)P(X > n) + (n+1)P(X = n+1) \\ &= T_n - (n+1)P(X > n+1). \end{aligned}$$

Donc la propriété (*) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

— Les suites (S_n) et (T_n) sont croissantes. D'après (*), $S_n \leq T_{n-1}$, d'où : (T_n) converge $\implies (S_n)$ converge $\implies X$ est d'espérance finie.

— Réciproquement : si X est d'espérance finie, alors (S_n) converge, d'où $\sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k) = E(X) - S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

D'après (*), $T_{n-1} = S_n + nP(X > n)$. Or $nP(X > n) = n \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k) \leq E(X) - S_n$. D'où

$nP(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc (T_{n-1}) converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Donc $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$. \square

EXERCICE 21 — Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles positives et d'espérance finie. Montrer que la va $[X]$ est d'espérance finie et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \leq E(X) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(X \geq n).$$

REMARQUE 22 — Si X est une vard et φ est une fonction de $X(\Omega)$ vers \mathbb{R} , alors :

1. $\varphi \circ X$ est aussi une vard, notée $\varphi(X)$;
2. soit $\varphi \circ X(\Omega) = \{b_j, j \in J\}$. Si $\varphi(X)$ possède une espérance $E(\varphi(X))$, alors cette espérance est égale à $\sum_{j \in J} b_j P(\varphi(X) = b_j)$ (c'est la définition de l'espérance) mais aussi à $\sum_{i \in I} \varphi(a_i) P(X = a_i)$ (c'est le théorème suivant, que nous admettons).

THÉORÈME 23 (théorème de transfert)

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, X une vard et φ une fonction de $X(\Omega) = \{a_i, i \in I\}$ vers \mathbb{R} :

$\varphi(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum \varphi(a_i) P(X = a_i)$ converge absolument. Et alors $E(\varphi(X))$ est égale à la somme $\sum_{i \in I} \varphi(a_i) P(X = a_i)$ de cette série.

X.6 VARIANCE ET ÉCART-TYPE

DÉFINITION 24

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une vard : $X(\Omega) = \{a_i, i \in I\}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si la série $\sum a_i^k P(X = a_i)$ converge absolument, alors on dit que X possède un **moment d'ordre k** et que ce moment d'ordre k est le nombre réel

$$\sum_{i \in I} a_i^k P(X = a_i).$$

Autrement dit (en utilisant le théorème de transfert) : X possède un moment d'ordre k si, et seulement si, X^k est d'espérance finie. Et alors ce moment d'ordre k est $E(X^k)$.

LEMME 25

Si une vard possède un moment d'ordre $k + 1$, alors elle possède aussi un moment d'ordre k .

Preuve — Pour tout réel $x \geq 0$, $x^k \leq x^{k+1} + 1$ (distinguer deux cas : $x \geq 1$ et $x < 1$).

D'où $|a_i^k P(X = a_i)| \leq |a_i^{k+1} P(X = a_i)| + P(X = a_i)$ pour tout $i \in I$. La série $\sum P(X = a_i)$ converge (vers 1).

Donc : si la série $\sum |a_i^{k+1} P(X = a_i)|$ converge, alors la série $\sum |a_i^k P(X = a_i)|$ converge aussi. \square

PROPOSITION-DÉFINITION 26

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une vard. Si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi et on appelle **variance** de X le réel positif

$$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

L'**écart-type** $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Preuve — D'après le lemme, X est d'espérance finie. Soit $\mu = E(X)$. Pour tout $i \in I$, $[a_i - \mu]^2 = a_i^2 - 2\mu a_i + \mu^2$. Or les séries $\sum a_i^2 P(X = a_i)$, $\sum (-2\mu a_i) P(X = a_i) = -2\mu \sum a_i P(X = a_i)$ et $\sum \mu^2 P(X = a_i) = \mu^2 \sum P(X = a_i)$ convergent, donc la variance est bien définie.

En outre :

$$V(X) = \sum_{i \in I} (a_i - \mu)^2 P(X = a_i) = \sum_{i \in I} a_i^2 P(X = a_i) - 2\mu \sum_{i \in I} a_i P(X = a_i) + \mu^2 \sum_{i \in I} P(X = a_i) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2.$$

□

REMARQUE 27 —

1. La variance mesure la dispersion ou l'étalement des valeurs a_i autour de l'espérance $E(X)$. En particulier, si $\exists a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 1$, alors $E(X) = a$ et $V(X) = 0$.
2. Si la variable X a une unité (km/s, V/m, etc), alors l'écart-type a la même unité (d'où l'intérêt de calculer la racine carrée de la variance).
3. Soient deux réels α et β . Si X^2 est d'espérance finie, alors $\alpha X + \beta$ aussi et

$$V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X).$$

EXERCICE 28 — Montrer que :

1. si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors X^2 est d'espérance finie et $V(X) = n \cdot p \cdot q$.
2. si $T \sim \mathcal{G}(p)$, alors T^2 est d'espérance finie et $V(T) = \frac{q}{p^2}$.
3. si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors X^2 est d'espérance finie et $V(X) = \lambda$.

X.7 LES INÉGALITÉS DE MARKOV ET DE BIENAYMÉ-TSCHEBYCHEV

Ces inégalités sont des *inégalités de concentration*. Elle mesurent la probabilité qu'une variable aléatoire X soit concentrée autour d'une valeur : 0 dans le cas de l'inégalité de Markov, $E(X)$ dans le cas de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

LEMME 29 (**Markov**)

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une *vard*. Si X est positive et d'espérance finie, alors :

$$\forall a > 0, \quad P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Preuve — Soient $(a_n)_{n \in I}$ les valeurs prises par la variable aléatoire X : l'espérance vaut $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n P(X = a_n)$. Soit

$J = \{n \in I \mid a_n \geq a\}$: $\mu \geq \sum_{n \in J} a_n P(X = a_n)$ car $J \subset I$ et les a_n sont positifs. D'où

$$\mu \geq \sum_{n \in J} a P(X = a_n) = a \sum_{n \in J} P(X = a_n) = a P(X \geq a).$$

□

PROPOSITION 30 (**Bienaymé-Tchebychev**)

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une *vard*. Si X^2 est d'espérance finie, alors

$$\forall a > 0, \quad P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Preuve — X^2 est d'espérance finie, d'où la variance $V(X) = \sigma^2$ et l'espérance $E(X) = \mu$ sont définies. La variable aléatoire $Y = (X - \mu)^2$ est positive et son espérance est $E(Y) = \sigma^2$. D'après l'inégalité de Markov, $P(Y \geq a^2) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$. Or les événements $Y \geq a^2$ et $|X - \mu| \geq a$ sont égaux. Donc $P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$.

□

X.8 SÉRIE GÉNÉRATRICE

DÉFINITION 31

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. La **série génératrice** de X est la série entière

$$\sum p_n \cdot t^n \quad \text{de coefficients } p_n = P(X = n).$$

La série $\sum p_n$ converge car sa somme vaut $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, d'où :

- (i) le rayon de convergence R de la série génératrice est supérieur ou égal à 1 ;
- (ii) la **fonction génératrice** est définie sur $] -R, +R[$ et peut-être aux bords de cet intervalle par

$$G_X : t \mapsto G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n = E(t^X)$$

- (iii) la série génératrice converge normalement sur $[-1, +1]$, d'où la fonction génératrice $G_X : t \mapsto G_X(t)$ est définie et même continue sur $[-1, +1]$ au moins ;
- (iv) la fonction G_X est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +1[$ au moins et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

La fonction génératrice de X permet donc de retrouver la loi de probabilité de X .

Elle permet aussi de calculer l'espérance et la variance de X . Si $R > 1$, alors $1 \in] -R, +R[$, d'où : $G'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n$ et $G''(1) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n$ car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. On en déduit que X^2 est d'espérance finie et :

$$E(X) = G'_X(1) \quad \text{et} \quad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2.$$

La proposition suivante ne dit rien d'autre quand $R > 1$ et en dit plus quand $R = 1$.

PROPOSITION 32

Soient X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

1. X est d'espérance finie si, et seulement si, la fonction G_X est dérivable en 1. Et alors

$$E(X) = G'_X(1).$$

2. X^2 est d'espérance finie si, et seulement si, la fonction G_X est deux fois dérivable en 1. Et alors

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2.$$

Preuve —

1. La fonction G_X est continue sur $[-1, +1]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +1[$ et $\forall t \in] -1, +1[$, $G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n t^{n-1}$. Si la variable aléatoire X possède une espérance $E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$, alors la série de fonctions $\sum np_n t^{n-1}$ converge normalement sur $[-1, +1]$, donc la fonction $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} np_n t^{n-1}$ est continue sur $[-1, +1]$, d'où $G'_X(t)$ possède une limite quand t tend vers 1. Donc (théorème de la limite de la dérivée) G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = \lim_{t \rightarrow 1} G'_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = E(X)$. Nous admettons la réciproque.

2. Si la variable aléatoire X possède un moment d'ordre 2, alors elle possède aussi un moment d'ordre 1, d'où la fonction G'_X est continue sur $[-1, +1]$. La série $\sum n^2 p_n$ converge (car la variable aléatoire X possède un moment d'ordre 2), d'où la série de fonctions $\sum n(n-1)p_n t^{n-2}$ converge normalement sur $[-1, +1]$, donc la fonction $t \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n t^{n-2}$ est continue sur $[-1, +1]$. Or $\forall t \in]-1, +1[$, $G''_X(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)p_n t^{n-2}$, d'où $G''_X(t)$ possède une limite quand t tend vers 1. D'où (théorème de la limite de la dérivée) G'_X est dérivable en 1 et

$$G''_X(1) = \lim_{t \rightarrow 1} G''_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = E(X^2) - E(X) = V(X) + [E(X)]^2 - E(X).$$

Donc $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$. Nous admettons la réciproque. □

EXERCICE 33 — Soient $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire. Montrer que :

1. si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = (pt + q)^n ;$$

2. si $T \sim \mathcal{G}(p)$, alors

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{q}, +\frac{1}{q} \right[, \quad G_T(t) = \frac{pt}{1 - qt} ;$$

3. si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda t}.$$

En déduire l'espérance et la variance de chacune de ces vard.

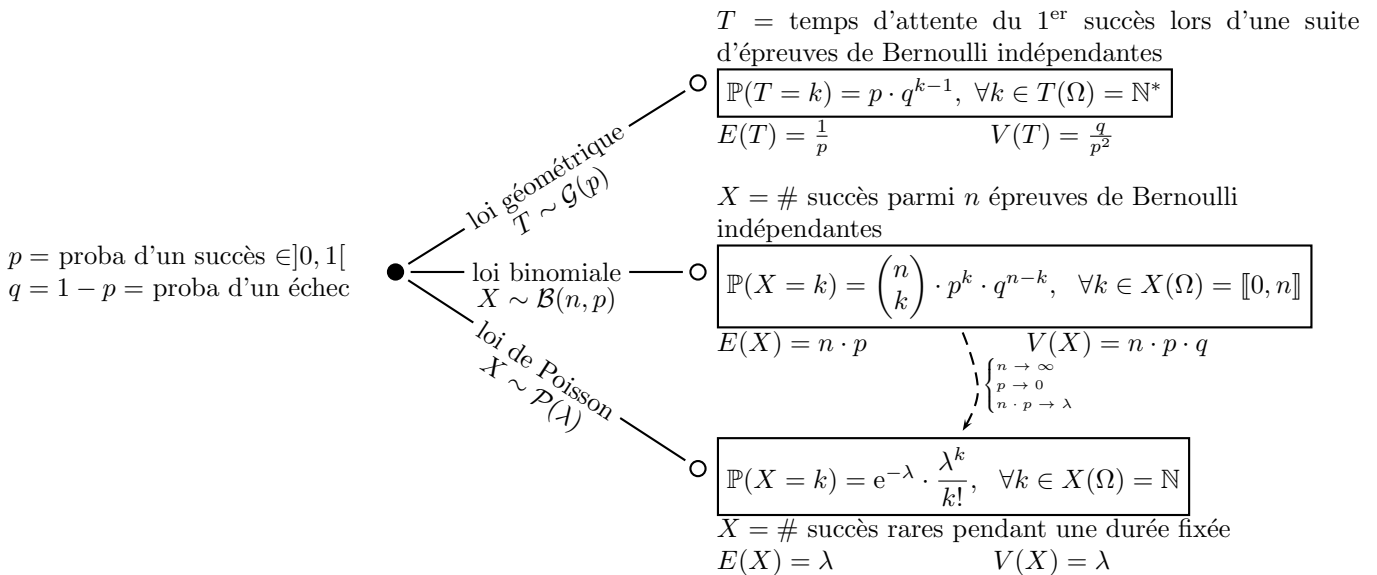


FIGURE X.2 – TROIS LOIS DE PROBABILITÉ CLASSIQUES