Colle n° 12

Séries de fonctions & produits scalaires

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\cos^n(x) \cdot \sin(nx)$.

1. Montrer que $f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) \cdot \cos\left[(n+1)x\right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$.
3. Soit, pour tout $x \in [0, \pi]$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   (a) Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et que
   $$\forall x \in]0, \pi[, \quad S'(x) = -1.$$
   (b) Calculer $S(x)$ pour chaque $x \in [0, \pi]$.
   (c) La convergence de la série $\sum f_n$ est-elle uniforme sur $[0, \pi]$?

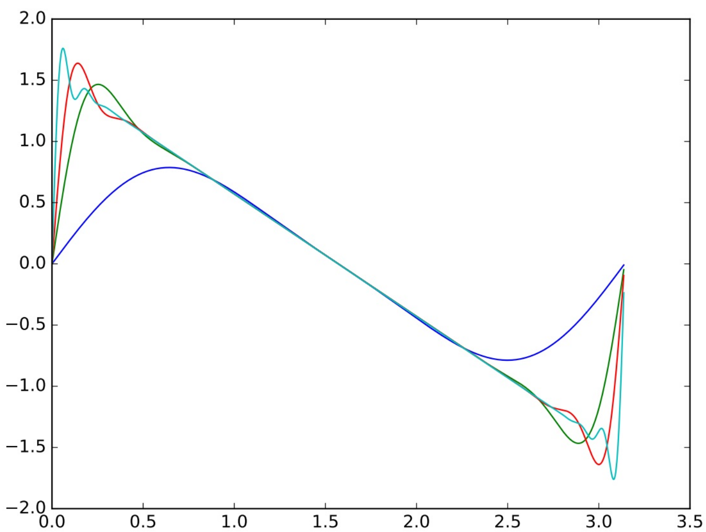

Figure 1 – Les fonctions $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$ pour $n \in \{2, 10, 20, 50\}$

Exercice 2 (Matrices de Gram & matrices de Hilbert)**.** Soit E un espace préhilbertien. La matrice de Gram d'une famille $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de n vecteurs de E est la matrice

$$G(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \begin{pmatrix} < v_1|v_1 > & < v_1|v_2 > & \cdots & < v_1|v_n > \\ < v_2|v_1 > & < v_2|v_2 > & \cdots & < v_2|v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < v_n|v_1 > & < v_n|v_2 > & \cdots & < v_n|v_n > \end{pmatrix}.$$

1. Soient u et v deux vecteurs de E. Montrer que le déterminant de la matrice

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} < u|u > & < u|v > \\ < v|u > & < v|v > \end{pmatrix}$$

est positif. À quelle condition (nécessaire ? suffisante ?) est-il strictement positif ?

2. Soit une famille $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de n vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de dimension n de E.
   (a) Soient $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F et la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

   $$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \qquad \text{pour chaque } j \in [\![1, n]\!].$$

   Montrer que $G(v_1, v_2, \cdots, v_n) = A^T \cdot A$.
   (b) Montrer que $\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n) \geq 0$.
   (c) Montrer que les matrices A et $G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ ont le même rang.
   (d) En déduire que le rang de $G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est égal à la dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.

3. On suppose que $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E et on note p la projection orthogonale de E sur F.
   (a) Soit z un vecteur de $F^\perp$. Exprimer $\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, z)$ en fonction de $\|z\|$ et $\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.
   (b) Soient y un vecteur de F et z un vecteur de $F^\perp$. Montrer que

   $$\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, y + z) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, v_2, \cdots, v_n).$$

   (c) Soit x un vecteur de E. Montrer que la distance $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ du vecteur x au sous-espace vectoriel F est égale à

   $$\sqrt{\frac{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, x)}{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n)}}.$$

4. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P|Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\, dt$.
   (a) Montrer que la matrice

   $$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix},$$

   appelée MATRICE DE HILBERT, est inversible.
   (b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

   $$f(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - a_0 - a_1 t - \cdots - a_{n-1} t^{n-1}\right)^2 dt$$

   possède un minimum égal à $\dfrac{\det H_{n+1}}{\det H_n}$.