

D.S. N° 4 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

13

Exercice 1. On lance indéfiniment une pièce qui tombe à chaque fois sur PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On note, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement « La pièce tombe sur FACE au k -ième lancer ».

1. **Le premier PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement E_n : « Le premier PILE apparaît au n -ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « FACE, FACE, PILE », alors l'événement E_3 est réalisé.

1,5 (a) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $v_n = P(E_n)$.

1,5 (b) Quelle est la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur PILE?

$E_n = \cap_{i=1}^n \bar{F}_i$ Indépendance $\Rightarrow v_n = (\frac{1}{3})^n$
 $\cup \bar{E}_n$ est disjointe $\Rightarrow 1 - v_n$

2. **Le premier double PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_n : « Le premier double PILE apparaît au n -ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « PILE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE », alors l'événement D_7 est réalisé.

0,5 (a) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(D_n)$. (La probabilité u_1 vaut 0.) Calculer u_2 .

2 (b) Exprimer $P(D_{n+2} | F_1)$ et $P(D_{n+2} | \bar{F}_1 \cap F_2)$ en fonction de u_n et de u_{n+1} .

3 (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3} \cdot u_{n+1} + \frac{2}{9} \cdot u_n$$

2,5 (d) Calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. $\{2, 1, 2\} = \{1 - \frac{1}{3}, \frac{2}{9}\}$ $\Rightarrow (x-1)(x-\frac{2}{9}) = 0$ $\Rightarrow u_n = (\frac{2}{9})^n$

2 (e) En déduire la probabilité de l'événement « On n'obtient jamais de double PILE ». $\cup \bar{D}_n$ \Rightarrow proba: 0,1

19

Exercice 2. On souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) la fonction f est de classe C^1
- (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$
- (iii) la fonction f' est croissante,
- (iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

10 Partie I - Existence d'une solution au problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

*1. $u_n(x) \sim \frac{x^2 - x}{2n^2}$ on change par de ligne
critère de Weierstrass*

- 1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

- 2. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$$

- 3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

(i) 2 (ii) 1,5

- 4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

(i) 1 (ii) 0,5

5 Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

- 5. Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

- 6. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p) \quad \text{et} \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}$$

- 7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.

- 8. Conclure que $\varphi = g$.

4 Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

1 9. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1} (2^N N!)^2}{2N+1 (2N)!}$$

1 10. Dédurre de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

2 11. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

18

Exercice 3. On considère la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des **polynômes de Hermite** définie par les relations :

$$H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = XH_n - H'_n$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

0,5 (a) H_n est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré n ;

2 (b) $H'_{n+1} = (n+1)H_n$.

2. Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2/2} dx.$$

1,5 (a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P | Q \rangle$.
Handwritten: $\int_{-\infty}^{+\infty} cv \Leftrightarrow \int_{-\infty}^0$ et $\int_0^{+\infty} cv$ 0,5

2 (b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. *Handwritten: BSP 0,5 > 1,5*

2 (c) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\langle P | H_{n+1} \rangle = \langle P' | H_n \rangle$. *Handwritten: IPPM Hyp C 1/2 0,5 B r m m 0,5*

2 (d) En déduire que les polynômes de Hermite sont deux à deux orthogonaux.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par $\varphi(P) = XP' - P''$ pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

0,5 (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1,5 (b) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme H_k est un vecteur propre de φ .

1 (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable? Quel est son spectre?

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes deux à deux) de multiplicité impaire du polynôme H_n et a_1, a_2, \dots, a_p ces racines. Soit S le polynôme défini par :

$$S = 1 \quad \text{si } p = 0 \quad \text{et} \quad S = \prod_{i=1}^p (X - a_i) \quad \text{sinon}$$

1 (a) Justifier que le polynôme H_n appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et en déduire que si $p < n$, alors $\langle S | H_n \rangle = 0$.

2 (b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

2 (c) En déduire que H_n a n racines réelles, distinctes deux à deux.

20

Exercice 4. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geq p}$ une suite de nombres réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$,

$P_n = \prod_{k=p}^n u_k$. On dit que la suite $(P_n)_{n \geq p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geq p} u_n$. Si la suite

$(P_n)_{n \geq p}$ converge, alors on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose : $\prod_{k=p}^{\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

3
$$\left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

(On pourra procéder par récurrence.)

(b) Montrer que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$: $\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$. 1,5 1+x_k > 0 1 convexité 0,5

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.
Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions continues sur \mathcal{S} à valeurs dans $] -1, +\infty[$.
On suppose que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} |f_n|$ converge uniformément sur \mathcal{S} .
Soient, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x)) \quad , \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

- 3 2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M |f_{n+1}(x)|$.
- 4,5 3. Montrer que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$.
- 1 4. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathcal{S} vers la fonction

$$P : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(x))$$

4 5. Montrer que cette convergence est uniforme et que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur \mathcal{S} . 2 0,5 1,5

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-nx^2})$.

- 2 6. Montrer que la fonction f est bien définie et qu'elle est continue sur \mathbb{R}_+^* . f_n(x) > -1 0,5 \sum f_n conv 1 cos 112* 0,5
- 4 7. Montrer que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}_+^* puis étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. 0,5 1,5 2