Exercices de colles MPI*

Exercice 1 (Mines Ponts PSI 2016).
On note E l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Soient E_1 le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions sinus et cosinus et $\phi_1 : f \in E_1 \mapsto f' \in E_1$. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E_1 tel que $u \circ u = \phi_1$.
2. Soit $\phi : f \in E \mapsto f' \in E$. Quel est le spectre de ϕ ? Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = \phi$?

Réponse 1.

1. Le sous-espace E_1 est stable par ϕ et en notant $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$, on a
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui est le carré de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. L'endomorphisme u tel que
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
convient.
2. Tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est la droite D_λ dirigée par $e_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$. Supposons qu'un tel v existe. Alors $v \circ \phi = v \circ v^2 = v^2 \circ v = \phi \circ v$ donc D_λ est stable par v. Puisque D_λ est une droite, d'où e_λ est un vecteur propre de v, associé à une valeur propre μ réelle. On a alors $\phi(e_\lambda) = \mu^2 e_\lambda$ donc $\lambda = \mu^2$, ce qui est absurde si on prend $\lambda < 0$.

Exercice 2 (Divers).
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 = f$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a,b]$ et déterminer sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en résolvant une équation différentielle.

Réponse 2.

- Comme f est continue sur $[a,b]$, f est bornée. Posons $M = \|f\|_\infty$. Pour $x \in [a,b]$, $|f_1(x)| \leqslant \int_a^p xMdt = M(x-a)$, donc $|f_2(x)| \leqslant \int_a^x M(t-a)dt = \frac{M}{2}(x-a)^2$, et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{M}{n!}(x-a)^n$.
  Il en résulte $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{M}{n!}(b-a)^n$ et, comme $\sum \frac{M}{n!}(b-a)^n$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,b]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n+1} : x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f_n est continue, et $f'_{n+1} = f_n$. L'étude faite ci-dessus montre que $\sum f'_{n+1}$ est normalement convergente sur $[a,b]$ et que $\sum f_{n+1}$ est simplement convergente. On en déduit que $T := \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} = S - f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $T' = (S-f)' = S = T + f$ sur le segment $[a,b]$
- Il s'agit de résoudre l'équation différentielle
$$T' - T = f$$
avec la condition initiale $T(a) = 0$, puisque $f_n(a) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $x \mapsto e^x(\int_a^x e^{-t} f(t)dt + c)$, ou c est une constante réelle. La condition initiale donne $c = 0$. Finalement,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) + T(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t)dt.$$

Exercice 3 (Divers).
Démontrer la convergence, puis calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{1+t}dt$.

Réponse 3.
Soit $\boxed{f : t \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{1+t}.}$

- f est définie sur $[0,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in]n, n+1[$, $f(t) = \dfrac{(-1)^n}{1+t}$, donc f est continue sur $]n, n+1[$, et admet des limites finies en n^+ et $(n+1)^-$.
  Or tout segment de $\mathbb{R}_+$ contient un nombre fini d'entiers. Sur un tel segment, f admet donc un nombre fini de points de discontinuité, et une limite finie à gauche et à droite en chaque point.
  Donc $\boxed{f \text{ est continue par morceaux sur } [0,+\infty[.}$

  On peut donc poser, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\boxed{F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{1+t} dt.}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On découpe l'intégrale par relation de Chasles :

$$\begin{aligned} F(n+1) &= \int_0^{n+1} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{1+t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^k}{1+t} dt \\ F(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \end{aligned}$$

  Or la suite $\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et tend vers 0. Donc la série numérique $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées. En notant S sa somme, on a montré que $\boxed{F(n) \text{ tend vers } S \text{ lorsque } n \text{ tend vers l'infini par valeurs entières.}}$
- Soit $x \in [0,+\infty[$. On peut écrire :

$$F(x) = F(\lfloor x \rfloor) + \int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{1+t} dt$$

  Lorsque x tend vers l'infini par valeurs réelles, $\lfloor x \rfloor$ tend vers l'infini par valeurs entières, donc $F(\lfloor x \rfloor) \to S$.
  De plus, $\left|\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{1+t} dt\right| \leq \displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^x \frac{dt}{1+t} \leq \frac{x - \lfloor x \rfloor}{1+\lfloor x \rfloor} \leq \frac{1}{1+\lfloor x \rfloor} \to 0.$
  Donc, par théorème d'encadrement, $\boxed{F(x) \text{ tend vers } S \text{ lorsque } x \text{ tend vers l'infini par valeurs réelles.}}$
  Autrement dit, $\boxed{\text{l'intégrale considérée converge et vaut } S.}$
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{p_n = \exp(F(2n))}$. Alors :

$$\begin{aligned} F(2n) &= \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k (\ln(k+2) - \ln(k+1)) \\ F(2n) &= \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(2i+2) - \ln(2i+1)) - \sum_{i=0}^{n-1} (\ln(2i+3) - \ln(2i+2)) \\ p_n &= \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} (2i+2)^2}{(2n+1)\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (2i+1)} \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)\left(\dfrac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2} \\ p_n &\sim \frac{(2^n \sqrt{2\pi}\sqrt{n} n^n e^{-n})^4}{2n(\sqrt{2\pi}\sqrt{2n}(2n)^{2n} e^{-2n})^2} \\ p_n &\sim \frac{2^{4n}(2\pi)^2 n^2 n^{4n} e^{-4n}}{2n 2\pi 2n 2^{4n} n^{4n} e^{-4n}} \\ p_n &\sim \frac{4\pi^2}{8\pi} \end{aligned}$$

  Donc (p_n) tend vers $\dfrac{\pi}{2}$, donc $(F(2n))$ tend vers $\ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Puisque l'intégrale converge, ceci est sa valeur, $\boxed{\text{l'intégrale donnée vaut donc } \ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right).}$