Louise OLLIVIER

1. Montrer que, pour tout couple $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge, puis qu'elle définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, que l'on notera $(\cdot \mid \cdot)$.
2. Montrer que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $(X^i \mid X^j) = (i+j)!$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^{+\infty} (1 - x_1 t - x_2 t^2 - \dots - x_n t^n)^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

présente un minimum en un unique vecteur $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
4. Soit $P(X) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k} (X+j)$. Calculer $q!P(q)$, pour chaque $q \in [\![1,n]\!]$, puis $P(-1)$.
5. Factoriser P et en déduire $f(a)$.

Corrigé :

1. *Soient P,Q dans $\mathbb{R}[X]$. Alors $X^2P(X)Q(X)$ est encore un polynôme et, par croissance comparée, $\dfrac{t^2P(t)Q(t)}{\mathrm{e}^t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Comme la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle y est intégrable.*

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } P,Q \in \mathbb{R}[X]\text{, l'intégrale } \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

   L'application $(\cdot \mid \cdot)$ est clairement bilinéaire, symétrique et positive, par positivité de l'intégrale. Si $(P \mid P) = 0$, alors la fonction continue et positive $t \mapsto P(t)^2\mathrm{e}^{-t}$ est d'intégrale nulle, donc est identiquement nulle. Mais comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, la fonction P^2 est nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc P admet une infinité de racines, ce qui donne $P = 0$. Ainsi, $\boxed{(\cdot \mid \cdot) \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$.

2. *Il suffit de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = n!$.*

   On en déduit alors que, $\boxed{\text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ (X^i \mid X^j) = \int_0^{+\infty} t^{i+j}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = (i+j)!}$.

3. *On a :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n), \quad f(x_1, \dots, x_n) = \left\| 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k X_k \right\|^2$$

   Le cours indique que la fonction f atteint son minimum en l'unique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k = p_F(1)$, où p_F est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^n)$ de dimension finie n.
   Ainsi, $\boxed{\text{il existe un unique } a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(a) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}$.

4. *Soit alors $q \in [\![1,n]\!]$.*

$$\begin{aligned} q!P(q) &= q! - \sum_{k=1}^{n} a_k q! \prod_{j=1}^{k} (q+j) = q! - \sum_{k=1}^{n} a_k (q+k)! = (X^q|1) - \sum_{k=1}^{n} a_k (X^q|X^k) \\ &= (X^q|1) - (X^q|p_F(1)) = (X^q|1 - p_F(1)) = 0 \quad \text{puisque } 1 - p_F(1) \in F^\perp \end{aligned}$$

   Ainsi, $\boxed{P(q) = 0, \text{ pour tout } q \in [\![1,n]\!]}$. D'autre part, $\boxed{P(-1) = 1 - 0 = 1}$.

5. *Le polynôme P est de degré n, admet $1, 2, \dots, n$ pour racines, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = \lambda \displaystyle\prod_{q=1}^{n} (X - q)$. Comme $P(-1) = 1$, on a $1 = \lambda \displaystyle\prod_{q=1}^{n} (-q-1) = \lambda(-1)^n (n+1)!$ et donc $\lambda = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$.*

Ainsi, $\boxed{P(X) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!} \displaystyle\prod_{q=1}^{n} (X-q)}$. *On en déduit que :*

$$\begin{aligned} f(a) &= \|1 - p_F(1)\|^2 = (1|1 - p_F(1)) = \|1\|^2 - (1|p_F(1)) = (X^0|X^0) - \sum_{k=1}^{n} a_k (X^0|X^k) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k k! = P(0) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{q=1}^{n} (-q) = \frac{(-1)^n (-1)^n n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f(a) = \dfrac{1}{n+1}}$.

Tom BROUILLET

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant p$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on munit de son produit scalaire canonique défini par $(X \mid Y) = X^\top Y$.

1. Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}\right.$ est injective. A quelle condition est-elle surjective ?
   Montrer que $A^\top A$ est inversible.
2. Justifier l'existence et l'unicité de $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$.
3. Montrer que X_0 est l'unique solution de l'équation $A^\top AX = A^\top B$.
4. Déterminer $\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Corrigé :

1. *Puisque A est de rang p, l'application $X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vers $\mathrm{Im}(A)$ est injective. Elle est surjective ssi $p = n$. De plus, $A^\top A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est de rang p donc inversible.*
2. *La distance de B à $\mathrm{Im}(A)$ est $\inf\{\|AX - B\|,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$. Cette distance est atteinte uniquement au projeté orthogonal sur $\mathrm{Im}(A)$ (qui est de dimension finie) de B. L'injectivité de A prouve que ce projeté s'écrit de façon unique AX_0.*
3. $$\begin{aligned} AX_0 = p_{\mathrm{Im}(A)}(B) &\iff \forall Z \in \mathrm{Im}(A),\ Z \perp AX_0 - B \iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX \perp AX_0 - B \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ (AX)^\top (AX_0 - B) = 0 \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ X^\top (A^\top AX_0 - A^\top B) = 0 \\ &\iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ X \perp A^\top AX_0 - A^\top B \iff A^\top AX_0 = A^\top B \end{aligned}$$
   X_0 est donc bien l'unique solution de $A^\top AX = A^\top B$.
4. *Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}(A) = 2$ et la borne inférieure est atteinte en $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ soluton de $A^\top AX_0 = A^\top B$. Or, $A^\top A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A^\top B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. La résolution donne alors $X_0 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le minimum cherché vaut $7/2$.*

Cyprien HOUEL

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $J_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x$.
2. En minorant $f : x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}$ sur des intervalles bien choisis, montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge pour tout $\alpha > 0$, alors que $x \to \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.
4. Etudier la nature des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}\mathrm{d}x$.

Corrigé :

1. *Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \sin^2(x)$ est continue et π-périodique sur le segment $[k\pi, (k+1)\pi]$. La linéarisation standard de $\sin^2(x)$ donne :*

$$J_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos(2x))\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

2. *La fonction f est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$, on a :*

$$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi} J_k = \frac{1}{2(k+1)}$$

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ diverge, la série $\sum I_k$ diverge aussi, et donc f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

3.
   - *Si $\alpha > 0$, les fonctions u et v définies par $u(x) = -\cos x$ et $v(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, avec $u'(x) = \sin x$ et $v'(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$. Comme uv est le produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$, on a $u(x)v(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et le théorème d'intégration par parties précise que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$. Comme $\left|\dfrac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ et que $\alpha + 1 > 1$, l'intégrale est convergente.*
   - *Si $\alpha > 1$, il est clair que l'intégrale est absolument convergente. Si $\alpha \in]0, 1]$, la même démarche qu'en 1) montrer que l'intégrale n'est pas absolument convergente, puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ est divergente. En conclusion, $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

4. *Les fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}$ sont continues par morceaux sur $[1 + \infty[$. Au voisinage de $+\infty$, on a :*

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x} = \frac{\sin x}{x^{1/2}}\left(1 + \frac{\sin x}{x^{1/2}}\right)^{-1} = \frac{\sin x}{x^{1/2}}\left(1 - \frac{\sin x}{x^{1/2}} + o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)\right) = \frac{\sin x}{x^{1/2}} - \frac{\sin^2 x}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ *est la somme d'une intégrale convergente et d'une intégrale divergente (d'après ce qui précède), donc diverge.*

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{x^{1/2}}\left(1 + \frac{\cos x}{x^{1/2}}\right)^{-1} = \frac{\sin x}{x^{1/2}}\left(1 - \frac{\cos x}{x^{1/2}} + \frac{\cos^2 x}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\sin x}{x^{1/2}} - \frac{\sin(2x)}{2x} + \frac{\sin x \cos^2 x}{x^{3/2}} + o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ *est la somme de 3 (ou 4) intégrales convergentes, donc converge.*