D.S. n° 4 de mathématiques

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient quatre exercices.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

---

13 **Exercice 1.** On lance indéfiniment une pièce qui tombe à chaque fois sur PILE avec la probabilité $\frac{2}{3}$ ou sur FACE avec la probabilité $\frac{1}{3}$. On note, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, F_k l'événement « La pièce tombe sur FACE au $k-$ième lancer ».

1. **Le premier PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement E_n : « Le premier PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « FACE, FACE, PILE », alors l'événement E_3 est réalisé.

   1,5 (a) Calculer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $v_n = P(E_n)$. $E_n = \bigcap$ 0,5 Indépendance 0,5 v_n 0,5

   1,5 (b) Quelle est la probabilité que la pièce tombe au moins une fois sur PILE ? $\cup E_n$ 0,5 disjoints 0,5 1 0,5

2. **Le premier double PILE.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement D_n : « Le premier double PILE apparaît au $n-$ième lancer ». Par exemple, si les premiers lancers donnent « PILE, FACE, FACE, PILE, FACE, PILE, PILE », alors l'événement D_7 est réalisé.

   0,5 (a) On note, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(D_n)$. (La probabilité u_1 vaut 0.) Calculer u_2.

   2 (b) Exprimer $P(D_{n+2} \mid F_1)$ et $P(D_{n+2} \mid \overline{F_1} \cap F_2)$ en fonction de u_n et de u_{n+1}.

   3 (c) En déduire que :

   $D_{n+2} = (D_{n+1} \cap F_1) \cup (D_{n+2} \cap \overline{F_1} \cap \overline{F_2})$ 2

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+2} = \frac{1}{3} \cdot u_{n+1} + \frac{2}{9} \cdot u_n.$$ 1

   2,5 (d) Calculer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ 1 $\exists (K, L), \forall n$ 1 u_n 0,5

   2 (e) En déduire la probabilité de l'événement « On n'obtient jamais de double PILE ». $\overline{\cup D_n}$ 1 proba 1

15 **Exercice 2.** On souhaite déterminer les fonctions $f\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) la fonction f est de classe C^1 (ii) pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(x+1)-f(x)=\ln(x)$

(iii) la fonction f' est croissante, (iv) la fonction f s'annule en 1 , c'est-à-dire $f(1)=0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

10 Partie I - Existence d'une solution au problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad u_n(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

2 1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. 1 $u_n(x)\sim\frac{x^2-x}{2n^2}$ 0,5 ne change pas de signe
0,5 critère de Riemann

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\quad \varphi(x)=-\ln(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$$

1,5 2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite numérique $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1}\varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall(n,x)\in\mathbb{N}^*\times]0,+\infty[,\quad u_n'(x)=\frac{x}{n(n+x)}+\varepsilon_n$$

1,5 3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

5 4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C). (i) 2 (iii) 1,5
(ii) 1 (iv) 0,5

5 Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g\ :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h=\varphi-g$.

0,5 5. Montrer que, pour tout $x>0$, $h(x+1)=h(x)$ et $h'(x+1)=h'(x)$.

1,5 6. Soient $x\in]0,1]$ et $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\varphi'(p)-g'(1+p)\underset{0,5}{\leqslant} h'(x+p)\leqslant\varphi'(1+p)-g'(p)\qquad\text{et}\qquad\varphi'(p)-g'(1+p)\underset{0,5}{=}h'(p)-\frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$|h'(x+p)-h'(p)|\leqslant\frac{1}{p}$$

2 7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction $\overset{0,5}{h'}$ est constante sur $]0,+\infty[$.

1 8. Conclure que $\varphi=g$.

13

Exercice 3. On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des **polynômes de Hermite** définie par les relations :

$$H_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = XH_n - H_n'$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   0,5 (a) H_n est un polynôme unitaire (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré n ;

   2 (b) $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

2. Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose :

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx.$$

   $\int_{-\infty}^{+\infty}$ cv $\iff \int_{-\infty}^{0}$ et $\int_{0}^{+\infty}$ cv 0,5 $\quad \sigma$ 1

   1,5 (a) Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q \rangle$.

   2 (b) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. BSP 0,5 D 1,5

   2 (c) Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_{n+1} \rangle = \langle P' \mid H_n \rangle$. IPP 1 Hyp C^1 0,5 Bornes 0,5

   2 (d) En déduire que les polynômes de Hermite sont deux à deux orthogonaux.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par $\varphi(P) = XP' - P''$ pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

   0,5 (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

   1,5 (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme H_k est un vecteur propre de φ.

   1 (c) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ? Quel est son spectre ?

15

Exercice 4. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n \geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$, $P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k$. On dit que la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\prod_{n \geqslant p} u_n$. Si la suite $(P_n)_{n \geqslant p}$ converge, alors on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose : $\prod_{k=p}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} P_n$.

1,5 — 1. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$: $\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

$1 + x_k \geqslant 0$ 1
convexité 0,5

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a, b]$.
Soit $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.
On suppose que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
Soient, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + f_k(x)) \quad , \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + |f_k(x)|) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|.$$

3 — 2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|$.

1,5 — 3. Montrer que, pour tous $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$.

1 — 4. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathcal{S}$ vers la fonction

$$P : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(x))$$

2 0,5 1,5

4 — 5. Montrer que cette convergence est uniforme et que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \text{ on pose } f(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{-nx^2}\right).$$

$f_n(x) > -1$ 0,5 C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$ 0,5
$\sum f_n$ CVN 1

2 — 6. Montrer que la fonction f est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 — 7. Montrer que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puis étudier la limite de f en 0.

0,5 1,5