Colle 12 en MPI

Exo 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et (E) l'équation $M^2 + M = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Trouver une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A
Soit M une solution de (E), montrer que A et M commutent, en déduire l'ensemble des solutions de (E)

Exo 2

Trouver $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de trace nulle telle que $M^2 + M^T = I_3$

Exo 3

$f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$
Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $I = [0, 1]$
Montrer que la convergence n'est pas normale sur I en étudiant ce qui se passe en $x = 1$

Exo 4

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x$ sous forme de la somme d'une série qu'on ne cherchera pas à calculer.

Exo 5

Soit E un préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$, développer : $\left\| \ (x|y)x - ||x||^2 y \ \right\|^2$, en déduire une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'étude du cas d'égalité.

Exo 6

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par :
$\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$
On pose $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$, c'est clairement un sous-espace vectoriel de E.

Soit $g \in F^\perp$

(a) Soit $u \in E$ définie par : $\forall x \in [0, 1], u(x) = x$. Vérifier que : $\forall f \in E, (ug|f) = 0$
(b) En déduire que $g = 0$. Montrer : $F + F^\perp \neq E$ et $F \neq F^{\perp\perp}$

Exo 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sous forme intégrale en écrivant : $\frac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 x^{k-1} \mathrm{d}x$
Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1 + x} \mathrm{d}x = 0$
En déduire que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et calculer sa somme.
Cette série est-elle absolument convergente ?

Exo 8

On note $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(k)$. Montrer que la suite (u_n) est bornée (*calculer* u_n)

On note, pour N entier > 0, $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{\sin(n)}{n}$

Montrer, pour $N > 1$: $S_N = \dfrac{u_N}{N} + \sum\limits_{n=1}^{N-1} \dfrac{u_n}{n(n+1)}$ (calculer $u_n - u_{n-1}$)

Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{\sin(n)}{n}$ converge

Montrer que la série précédente n'est pas absolument convergente en remarquant que $|\sin(n)| \geq \sin^2(n)$ puis en linéarisant $\sin^2(n)$

Exo 9

Soient a et b des réels différents. Pour x réel, on note $D(x)$ le déterminant d'ordre n :

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & x+a & x+a & \cdots & x+a \\ x+b & x & x+a & \cdots & x+a \\ x+b & x+b & x & \ddots & x+a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x+b & x+b & x+b & \cdots & x \end{vmatrix}$$

(a) Montrer que D est un polynôme de degré ≤ 1 en x, indication : éliminer tous les x sauf ceux de la première colonne par opérations élémentaires puis développer par rapport à la première colonne.

(b) Calculer $D(-a)$ et $D(-b)$ et en déduire la valeur de $D(0)$

Exo 10

Montrer qu'une matrice carrée antisymétrique d'ordre impair n'est jamais inversible.

Exo 11

Calculer le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :
$u(M) = M^T$

Exo 12

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B^{n-1} \neq 0$ et $B^n = 0$
(a) Déterminer une matrice très simple semblable à B
(b) Démontrer que $\det(I_n + B) = 1$
(c) Démontrer que pour toute matrice carrée A qui commute avec B on a : $\det(A+B) = \det(A)$
(On pourra distinguer deux cas selon que A est inversible ou non)

Corrigé

Corrigé exo 1

$\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, les deux vecteurs de cette famille sont des vecteurs propres de A

$AM = (M^2 + M)M = M^3 + M^2 = M(M^2 + M) = MA$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc : $AM \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = MA \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que le vecteur $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient au *sep* de A associé à la valeur propre 2, or ce sep est de dimension 1 et engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc :

$\exists \alpha \in \mathbb{R}, M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On montre de même : $\exists \beta \in \mathbb{R}, M \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On note P la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathscr{B}'$, on a : $A = PDP^{-1}$ et $M = PD'P^{-1}$ où $D = diag(2, 0)$ et $D' = diag(\alpha, \beta)$

La relation $M^2 + M = A$ conduit facilement à : $\begin{cases} \alpha^2 + \alpha = 2 \\ \beta^2 + \beta = 0 \end{cases}$

$\alpha = 1$ ou -2 et $\beta = 0$ ou -1

On écrit M sous la forme $PD'P^{-1}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4 solutions : $M = \frac{1}{2}A, M = -A, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Corrigé exo 2

$M(M - I)(M^2 + M - I) = 0$ donc M diag et $\mathrm{sp}(M) \subset \{0, 1, \varphi, \overline{\varphi}\}$
$\mathrm{Trace}(M) = 0$ donc $\mathrm{sp}(M) = \{1, \varphi, \overline{\varphi}\}$
$\mathrm{sp}(M^2) = \{1, \varphi^2 = 1 - \varphi, \overline{\varphi}^2 = 1 - \overline{\varphi}\}$
$M^2 = I - M^T$ donc $\mathrm{sp}(M^2) = \{1 - 1, 1 - \varphi, 1 - \overline{\varphi}\}$: absurde.

Corrigé exo 3

Si $x \in [0, 1[$, la série $\sum f_n(x) = \sin(\pi x) \sum x^n$ converge comme série géomtrique deraison x avec $|x| < 1$ et sa somme vaut : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sin(\pi x) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$

Si $x = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$

La série de fonction $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $S : x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$ si $x \neq 1$ et $S(1) = 0$

Montrons que la CV n'est pas normale en raisonnant par l'absurde. Si elle l'était, la fonction somme serait continue par transmission de la continuité, chaque fonction f_n étant continue.

Montrons que la fonction somme n'est pas continue en 1

$\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\sin(\pi x)}{1-x}$, CDV $h = 1 - x \to 0^+$
$\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sin(\pi-\pi h)}{h} = \lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\sin(\pi h)}{h} = \pi$ (se voit avec un équivalent)

$\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) \neq S(1)$ donc S n'est pas continue en 1.

Corrigé exo 4

$f : x \mapsto x^x = e^{x\ln(x)}$ est continue sur $]0,1]$ et est prolongeable par continuité en 0 avec la valeur 0 donc f est intégrable sur $]0,1]$

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln^n(x)}{n!}$

On pose $f_n(x) = \frac{x^n \ln^n(x)}{n!}$
Calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^n(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 x^n \ln^n(x)\mathrm{d}x$
Après une intégration par parties : $I_n = -\frac{n}{n+1} \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^{n-1}(x)\mathrm{d}x$

Après une autre intégration par parties : $I_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^{n-2}(x)\mathrm{d}x$

On prouve par récurrence finie, à n fixé, que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$ on a :
$I_n = (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)^k} \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^{n-k}(x)\mathrm{d}x$

Pour $k = n$: $I_n = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^n} \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$

Montrons que la série numérique $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x$ converge pour utiliser le terme d'intégration terme à terme d'une série de fonction.

$x\ln(x) \leq 0$ donc $|x\ln(x)| = -x\ln(x)$ et $|f_n(x)| = (-1)^n \frac{x^n \ln^n(x)}{n!}$

$\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$, la série $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ CV car de terme général positif et négligeable devant $\frac{1}{n^2}$

On peut permuter la série et l'intégrale donc : $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$

Corrigé exo 5

On développe par bilinéarité du produit scalaire :
si $a, b \in E$ alors $\| \ a - b \ \|^2 = \| \ a \ \|^2 + \| \ b \ \|^2 - 2(a|b)$

$\| \ (x|y)x - ||x||^2 y \ \|^2 = \| \ (x|y)x \ \|^2 + \| \ ||x||^2 y \ \|^2 - 2((x|y)x|||x||^2 y)$

$(x|y)$ et $||x||^2$ sont des scalaires et x et y des vecteurs donc :
$\left\| \ (x|y)x \ \right\| = |(x|y)|.||x||$ et $\left\| \ ||x||^2 y \ \right\| = ||x||^2.||y||$ d'après l'axiome d'homogénéité.

$((x|y)x|||x||^2 y) = (x|y)||x||^2(x|y) = (x|y)^2||x||^2$ par linéarité à gauche et à droite du produit scalaire.

$\left\| \ (x|y)x - ||x||^2 y \ \right\|^2 = (x|y)^2||x||^2 + ||x||^4||y||^2 - 2(x|y)^2||x||^2 = ||x||^2(||x||^2||y||^2 - (x|y)^2)$

$\left\| \ (x|y)x - ||x||^2 y \ \right\|^2 \geq 0$ donc $||x||^2(||x||^2||y||^2 - (x|y)^2) \geq 0$
On suppose $x \neq O$, on a alors $||x||^2 > 0$ donc $||x||^2||y||^2 - (x|y)^2) \geq 0$ soit $|(x|y)| \leq ||x||.||y||$

Cas d'égalité : si $|(x|y)| = ||x||.||y||$ alors $\left\| \ (x|y)x - ||x||^2 y \ \right\|^2 = (x|y)^2||x||^2 + ||x||^4||y||^2 - 2(x|y)^2||x||^2 = ||x||^2(||x||^2||y||^2 - (x|y)^2) = 0$ donc :

$(x|y)x - ||x||^2 y = O$ donc, en supposant $x \neq 0$: $y = kx$ où $k = \frac{(x|y)}{||x||} \in \mathbb{R}$, la famille (x, y) est libre. La réciproque est vraie si la famille (x, y) est libre en reprenant la preuve du cours.

Corrigé exo 6

(a) $(ug|f) = \int_0^1 xg(x)f(x)dx = \int_0^1 g(x)xf(x)dx = (g, uf)$

uf est la fonction $uf : x \mapsto xf(x)$ donc $(uf)(0) = 0$ donc $uf \in F$
$uf \in F, g \in F^{\perp}$ donc $(g|uf) = 0$ soit $(ug|f) = 0$

(b) Le résultat précédent est vrai pour tout $f \in E$ pour en particulier pour $f = ug$: $(ug|ug) = 0$ soit $ug = 0$ par définition du produit scalaire.

$\forall x \in [0, 1], xg(x) = 0$: on peut diviser par x pour tout x non nul donc : $\forall x \in]0, 1], g(x) = 0$

Montrons que $g(0) = 0$: g est continue en 0 donc $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 0$, en effet, x tend vers 0^+ donc $x > 0$ donc $g(x) = 0$

Conclusion : $g = 0$, c'est vrai pour tout $g \in F^{\perp}$ donc $F^{\perp} \subset \{0\}$
Réciproquement, $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E donc $0 \in F^{\perp}$, finalement : $F^{\perp} = \{0\}$

$F + F^{\perp} = F \neq E$ car $F \neq E$ (la fonction $x \mapsto 1$ appartient à E mais pas à F)
$F^{\perp\perp} = \{O\}^{\perp} = E \neq F$

Corrigé exo 7

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 x^{k-1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} dx$$

par linéarité de l'intégrale.
$\sum\limits_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-x)^k$ est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-x \neq 1$ car $x \in [0, 1]$ donc : $S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x} dx = I - J_n$ où $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$ et

$J_n = \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx$

On va montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ en majorant $|J_n|$ grâce à l'inégalité de la moyenne :

$$|J_n| \leq \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{1+x}\right| \int_0^1 |(-x)^n| dx = 1. \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(S_n) converge vers $\ln(2)$ donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et sa somme vaut $\ln(2)$

La série $\sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique, elle diverge. La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est donc convergente mais pas absolument convergente.

Corrigé exo 8

$u_n = \mathrm{Im}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)}-1}{e^i-1}\right)$

On sait que : $\forall z \in \mathbb{C}, |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ donc $|u_n| \leq \frac{|e^{i(n+1)}-1|}{|e^i-1|} \leq \frac{|e^{i(n+1)}|+|1|}{|e^i-1|} = \frac{2}{|e^i-1|}$

On a utilisé l'inégalité triangulaire : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$ donc $|z_1-z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

La suite (u_n) est donc majorée. $u_n - u_{n-1} = \sin(n)$ donc :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n - u_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{u_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{u_n}{n+1} =$$

$$\frac{u_N}{N} - u_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{u_n}{n} - \frac{u_n}{n+1}\right) = \frac{u_N}{N} - 0 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{u_n(n+1-n)}{n(n+1)} = \frac{u_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{u_n}{n(n+1)}$$

On note M un majorant de la suite $(|u_n|); \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |\frac{u_n}{n(n+1)}| \leq \frac{M}{n^2}$
La série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente ($\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum \frac{M}{n^2}$ converge. On en déduit que la série $\sum |\frac{u_n}{n(n+1)}|$ converge d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs. La série $\sum \frac{u_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente donc convergente, on note ℓ sa somme.

La suite (u_n) est bornée donc $\frac{u_N}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge (vers $0+\ell$), c'est-à-dire que la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

$\sin^2(n) = |\sin(n)|^2$ donc $|\sin(n)| - \sin^2(n) = |\sin(n)|(1-|\sin(n)|) \geq 0$ car $0 \leq |\sin(n)| \leq 1$ ainsi : $\frac{|\sin(n)|}{n} \geq \frac{\sin^2(n)}{n} = \frac{1-\cos(2n)}{2n}$

La série $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, on montre la convergence de la série $\sum \frac{\cos(2n)}{2n}$ exactement de la même façon que celle de la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$ donc la série $\sum \frac{\sin^2(n)}{n}$ puis la série $\sum \frac{|\sin(n)|}{n}$ diverge.

Corrigé exo 9

(a) On effectue $\forall j \in [\![2, n]\!], C_j \leftarrow C_j - C_1$: cela ne change pas le déterminant car ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

$D(x) = \begin{vmatrix} x & * & * & \cdots & * \\ x+b & * & * & \cdots & * \\ x+b & * & * & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x+b & * & * & \cdots & * \end{vmatrix}$: les termes notés * ne sont pas explicités mais ne dépendent pas de x

On développe $D(x)$ par rapport à la première colonne : $D(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}\gamma_{i,1} = x\gamma_{1,1} + (x+b)\sum_{i=2}^{n}\gamma_{i,1}$

$\forall i \in [\![1,n]\!], \gamma_{i,1} = (-1)^{i+1}\det(A_{i,1})$ où $A_{i,1}$ est la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la première colonne de la matrice précédente, la matrice $A_{i,1}$ ne dépend donc plus de x puisque x n'apparaissaît que dans la première colonne et on l'a rayée. $A_{i,1}$ ne dépend de x donc $\gamma_{i,1}$ non plus.

$D(x) = x\gamma_{1,1} + (x+b)\sum_{i=2}^{n}\gamma_{i,1}$ où $\forall i \in [\![1,n]\!], \gamma_{i,1}$ ne dépend pas de x donc D est un polynôme de degré ≤ 1 en x

(b) On déduit du (a) : $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, D(x) = \alpha x + \beta$

On cherche $D(0) = \beta$

$D(-a) = \begin{vmatrix} -a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a+b & -a & 0 & \cdots & 0 \\ -a+b & -a+b & -a & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a+b & -a+b & -a+b & \cdots & -a \end{vmatrix} = (-a)^n$ car le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses termes diagonaux.

On calcule de même : $D(-b) = (-b)^n$

On a : $\begin{cases} D(-a) = & (-a)^n = & -\alpha a + \beta \\ D(-b) = & (-b)^n = & -\alpha b + \beta \end{cases}$

On en tire après calculs, sachant que $a \neq b, \beta = \frac{b(-a)^n - a(-b)^n}{b-a} = (-1)^n \frac{a^n b - ab^n}{b-a} = (-1)^n ab \frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{b-a} =$
$(-1)^{n-1} ab \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{b-a} = (-1)^{n-1} ab \sum_{k=0}^{n-2} a^k b^{n-2-k}$

Conclusion :

$$D(0) = \begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 0 \end{vmatrix}_{[n]} = (-1)^{n-1} ab \sum_{k=0}^{n-2} a^k b^{n-2-k}$$

Corrigé exo 10

Idée : on sait que pour toute matrice carrée M on a : M inversible $\Longleftrightarrow \det(M) \neq 0$, on peut donc dire aussi : M non inversible $\Longleftrightarrow \det(M) = 0$; on va donc montrer ici que

$\det(A) = 0$, ce qui prouvera que A n'est pas inversible.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice antisymétrique, cela signifie : $A^T = -A$
On passe au déterminant : $\det(A^T) = \det(-A)$, relation notée $(\star)$

On sait que pour toute matrice carrée M on a : $\det(M^T) = \det(M)$ donc en particulier $\det(A^T) = \det(A)$

On sait que pour toute matrice carrée M d'ordre (=taille) n et tout scalaire α on a : $\det(\alpha M) = \alpha^n \det(M)$, en particulier pour $\alpha = -1$ et $M = A$: $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$

On ré-écrit donc la relation $(\star)$ sous la forme : $\det(A) = (-1)^n \det(A)$

n est impair par hypothèse donc $(-1)^n = -1$ d'où : $-\det(A) = \det(A)$ soit $2\det(A) = 0$ puis $\det(A) = 0$
$\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

Corrigé exo 11

u est une symétrie.

On note $S_n(\mathbb{R})$ le SEV de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques : $M \in S_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M^T = M$ et $M \in A_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow M^T = -M$

Montrons que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ par analyse-synthèse.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Analyse : si $M = S + A$ où S est symétrique et A antisymétrique alors $M^T = S^T + A^T = S - A$

On en tire $S = \frac{1}{2}(M + M^T)$ et $B = \frac{1}{2}(M - M^T)$

On vérifie facilement que S est symétrique, A antisymétrique et $S + A = M$

On va chercher une base de $S_n(\mathbb{R})$

Soit $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
On décompose une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans cette base : $M = \sum\limits_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$

M symétrique $\Longleftrightarrow M^T = M \Longleftrightarrow \sum\limits_{i,j} m_{i,j} E_{j,i} = \sum\limits_{i,j} m_{i,j} E_{i,j} \Longleftrightarrow \sum\limits_{i,j} m_{j,i} E_{i,j} = \sum\limits_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$
après CDI
$\Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, m_{j,i} = m_{i,j}$ car la famille $(E_{i,j})$ est libre.

$\Longleftrightarrow M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum\limits_{i<j} m_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i})$

Les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,j} + E_{j,i}$ sont toutes symétriques et donc $(E_{i,i})_{i \in [\![1,n]\!]} \cup (E_{i,j} + E_{j,i})_{i<j}$ est une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$. On voit que la relation $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i} E_{i,i} + \sum\limits_{i<j} m_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = O$ entraîne que tous les $m_{i,j}$ sont nuls, en effet, cette relation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & & & \\ & \ddots & m_{i,j} & \\ & m_{i,j} & \ddots & \\ & & & m_{n,n} \end{pmatrix} = O.$$ La famille indiquée est donc libre, c'est finalement une base de $S_n(\mathbb{R})$.

La dimension de $S_n(\mathbb{R})$ vaut le nombre d'éléments de cette famille, soit $\frac{n(n+1)}{2}$
La dimension de $A_n(\mathbb{R})$ vaut donc $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

On note $\mathscr{B}$ la base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ obtenu en concaténant une base de $S_n(\mathbb{R})$ et une base de $A_n(\mathbb{R})$ (c'est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car ces deux SEV sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$)

La matrice de u dans cette base, qui a n^2 lignes et n^2 colonnes, est diagonale, les $\frac{n(n+1)}{2}$ premiers coefficients diagonaux valent 1, les autres valent -1.

Réponse : $\boxed{\det(u) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}$

Remarque : on pouvait aussi remarquer que $u^2 = Id$ donc u est une symétrie. On note F =Ker$(u - Id)$ et G =Ker$(u + Id)$, on sait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus G$ par propriété des symétries. On montre finalement que $F = S_n(\mathbb{R})$ et $G = A_n(\mathbb{R})$

Corrigé exo 12

(a) On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. $B^{n-1} \neq 0$ donc $u^{n-1} \neq 0$. Soit donc $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$, on vérifie que $b' = \big(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ donc une base car contient $n = \dim(\mathbb{R}^n)$ éléments.
$B' = Mat_{b'}(u)$ est triangulaire inférieure à éléments diagonaux tous nuls, des 1 en position $(j+1, j)$ pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$ et des zéros partout ailleurs. On a, d'après les formules de changement de bases, $B = PB'P^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique vers b'

(b) $\det(I_n + B) = \det(Id_{\mathbb{R}^n} + u)$ que l'on calcule dans la base b', la matrice de $Id_{\mathbb{R}^n} + u$ dans la base b' est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale donc son déterminant vaut 1.

(c)
• Si A est inversible : $\det(A + B) = \det(A)\det(I_n + A^{-1}B)$ avec $\big(A^{-1}B\big)^n = A^{-n}B^n$ car A^{-1} et B commutent $= O$ et $\big(A^{-1}B\big)^{n-1} = A^{-(n-1)}B^{n-1} \neq O$ car si $= O$ alors $B^{n-1} = A^{n-1} \times O = O$, ce qui est faux. On utilise le (b) pour $A^{-1}B$ à la place de B, ce qui est possible car $A^{-1}B$ vérifie les mêmes hypothèses que B : $\det(I_n + A^{-1}B) = 1$ donc $\det(A + B) = \det(A)$

• Si A n'est pas inversible, montrons que $\det(A + B) = 0$ en raisonnant par l'absurde : si $\det(A + B) \neq 0$ alors $A + B$ est inversible, on écrit $A = A + B - B$: $(-B)^n = O, (-B)^{n-1} \neq O, A + B$ et $(-B)$ commutent et $A + B$ est inversible donc, en reprenant le premier cas du (c), $\det(A) = \det(A + B - B) = \det(A + B)$, ce qui est absurde car $\det(A) = 0$ et $\det(A + B) \neq 0$