Urne 1 **proba19**

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules de l'urne deux par deux.

Q. 1 – Quelle est la probabilité d'avoir à chaque tirage une boule blanche et une boule noire ?

Solution : Pour $1 \leq i \leq n$, notons S_i l'événement le i-ième tirage donne une boule blanche et une boule noire et A l'événement dont on cherche la probabilité. On a

$$A = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n \quad (n \ \text{ succès}) \ .$$

La formule des probabilités composées donne :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(S_1) \times \mathbb{P}_{S_1}(S_2) \times \mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(S_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1}}(S_n).$$

Chacun des n facteurs est la probabilité p_k de tirer une boule blanche et une boule noire quand on tire simultanément 2 boules dans une urne contenant k boules blanches et k boules noires (avec k variant de n à 1).

Lorsque l'urne contient $2k$ boules (k blanches et k noires) cette probabilité est :

$$p_k = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}} = \frac{k^2}{\binom{2k}{2}} = \frac{k^2}{\frac{2k(2k-1)}{2}} = \frac{k}{2k-1} \ .$$

En reprenant (1), il vient alors :

$$\mathbb{P}(A) = p_n \times p_{n-1} \times \cdots \times p_1 = \frac{n}{2n-1} \times \frac{n-1}{2n-3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \ .$$

Urne 2 **`proba20`**

Une urne contient 3 boules vertes et 3 boules rouges. Une boule est enlevée de l'urne au hasard. Une personne A tire 6 fois une boule avec remise et obtient 6 fois une boule rouge. Une personne B tire 600 fois une boule avec remise et obtient 303 fois une rouge et 297 fois une verte.

Q. 1 – Lequel des deux (A ou B) peut s'attendre le plus à ce qu'une boule verte ait été enlevée ?

Solution : On note V l'événement "La boule retirée initialement est verte" et $R = \overline{V}$ son complémentaire, puis A l'événement "A tire 6 fois une rouge au cours de 6 tirages indépendants avec remise parmi les 5 boules restantes" et B l'événement "Barnabé tire 303 fois une rouge et 297 fois une verte au cours de 600 tirages indépendants avec remise parmi les 5 boules restantes". On souhaite comparer les probabilités conditionnelles $P_A(V)$ et $P_B(V)$. Pour cela, on va utiliser la formule de Bayes et le système complet d'événements (V, R) : comme $P(R) = P(V) = \frac{1}{2}$:

$$P_A(V) = \frac{P_V(A)P(V)}{P(A)} = \frac{P_V(A)P(V)}{P_V(A)P(V) + P_R(A)P(R)} = \frac{P_V(A)}{P_V(A) + P_R(A)}$$

$$P_B(V) = \frac{P_V(B)P(V)}{P(B)} = \frac{P_V(B)P(V)}{P_V(B)P(V) + P_R(B)P(R)} = \frac{P_V(B)}{P_V(B) + P_R(B)}.$$

De plus : $P_V(A) = \left(\frac{3}{5}\right)^6$, $P_R(A) = \left(\frac{2}{5}\right)^6$, $P_V(B) = \binom{600}{303}\left(\frac{3}{5}\right)^{303}\left(\frac{2}{5}\right)^{297}$ et $P_R(B) = \binom{600}{303}\left(\frac{2}{5}\right)^{303}\left(\frac{3}{5}\right)^{297}$. Ainsi

$$P_A(V) = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^6 + \left(\frac{2}{5}\right)^6} = \frac{3^6}{3^6 + 2^6}$$

$$P_B(V) = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{303}\left(\frac{2}{5}\right)^{297}}{\left(\frac{3}{5}\right)^{303}\left(\frac{2}{5}\right)^{297} + \left(\frac{2}{5}\right)^{303}\left(\frac{3}{5}\right)^{297}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6}{\left(\frac{3}{5}\right)^6 + \left(\frac{2}{5}\right)^6} = P_A(V).$$

Aucun des deux ne peut s'attendre plus que l'autre à ce qu'une boule verte ait été initialement retirée.

Probabilités et différence symétrique **proba17**

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé. Pour $A, B \in T$, on pose :

$$d(A, B) = P(A\Delta B).$$

avec $A\Delta B$ la différence symétrique de A et B.

Q. 1 – Montrer que $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$.

> *Solution :* $A\Delta C \subseteq (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$ et donc $P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C)$.

Q. 2 – En déduire $|P(A) - P(B)| \leq P(A\Delta B)$.

> *Solution :* En prenant $B = \emptyset$ dans la question précédente. $P(A) = P(A\Delta\emptyset) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta\emptyset) = P(A\Delta B) + P(B)$ donc $P(A) - P(B) \leq P(A\Delta B)$. Par symétrie : $P(B) - P(A) \leq P(A\Delta B)$.

Définition de probabilités **proba16**

Q. 1 – Soit $(a_n)_{n \in N}$ une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vérifiant $P(\{n, n+1, \dots\}) = \lambda a_n$.

Solution :

- Analyse : Si P est solution alors $P(\mathbb{N}) = 1$ et donc $\lambda a_0 = 1$. On en déduit $\lambda = \frac{1}{a_0}$. De plus, $a_n - a_{n+1} = P(\{n\}) = P(\{n, n+1, \dots\}) - P(\{n+1, n+2, \dots\}) = a_0$ ce qui détermine P.
- Synthèse : Posons $p_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_0}$. Les p_n sont des réels positifs car la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{a_0} \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = 1$$

car la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle. Il existe donc une probabilité P sur $\mathbb{N}$ vérifiant $P(\{n\}) = p_n$ et alors, par continuité croissante $P(\{n, n+1, \dots\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = \frac{a_n}{a_0}$

Parapluie **proba05**

Un professeur se rend chaque jour de son domicile à son lycée, puis de son lycée à son domicile. Il possède un unique parapluie. À chaque fois qu'il part, s'il pleut et si le parapluie est à sa disposition, alors il le prend. S'il ne pleut pas, il le laisse. On suppose que la probabilité qu'il pleuve vaut constamment $p \in]0,1[$ (on pose $q = 1 - p$). Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note p_n la probabilité que le parapluie soit disponible là où se trouve le professeur (au domicile ou au lycée) au bout de n trajets et $q_n = 1 - p_n$. La probabilité qu'il soit disponible initialement est p_0, quelconque.

Q. 1 – Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$$

Solution : On note A_n (resp. B_n) l'événement "le parapluie est disponible (resp. indisponible) au bout de n trajets".

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n)$$

Or si $p_n \neq 0$ alors $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n) = p$ (il faut qu'il pleuve pour que le parapluie soit encore disponible) et donc $\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n) = pp_n$ (qui est aussi valable lorsque $p_n = 0$). Par ailleurs $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid B_n) = 1$, en effet si le parapluie n'est pas avec le professeur c'est qu'en changeant de lieu il le retrouvera. Finalement $\mathbb{P}(A_{n+1} \cap B_n) = q_n$.

Ce qui donne la relation $p_{n+1} = pp_n + q_n$

De même $q_{n+1} = qp_n$

Finalement

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

Q. 2 – Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution : On diagonalise $S = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -q \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ q & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{1+q}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-q)^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}.$$

D'où la convergence des suites (p_n) et (q_n) vers des limites a et b vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+q} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$$