Exercice 1 - Espace l^2 ($\star\star\star\star$)

Soit $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, \sum u_n^2 < +\infty\right\}$, pour $(u,v) \in E^2$, on pose $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

1. Montrer que $\langle u, v\rangle$ existe pour u et v dans E.

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué au produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k v_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2}$$

Or u et v sont des éléments de E ainsi les deux séries ci-dessus sont convergente, on en déduit que la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

2. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord la suite nulle est un élément de E, de plus si u et v sont deux éléments de E et que $\lambda \in \mathbb{R}$ on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k)^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k^2 + 2\lambda \sum_{k=0}^{n} u_k v_k + \lambda^2 \sum_{k=0}^{n} v_k^2$$

Les séries $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ converge car u et v sont des éléments de E, de plus d'après ce qui précède la série $\sum u_n v_n$ converge également ainsi la série $\sum (u_n + \lambda v_n)^2$ converge. On en déduit que E est stable par combinaison linéaire, c'est donc un espace vectoriel.

3. Montrer que $\langle u, v\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Soient $(u, v, w) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (u_k + \lambda v_k)\, w_k = \sum_{k=0}^{n} u_k w_k + \lambda \sum_{k=0}^{n} v_k w_k$$

Chacun des deux séries du membre de droite possède une limite, ainsi le terme de gauche en possède une également et de plus on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + \lambda v_k)\, w_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k w_k + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} v_k w_k$$

Ainsi $\langle ., .\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. De plus par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ on en déduit qu'il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique. A présent montrons qu'elle est définie positive, pour ça on considère $u \in E$ telle que $\langle u, u\rangle = 0$ autrement dit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \tag{1}$$

Or les sommes partielles de la série à terme positif $\sum u_n^2$ forment une suite croissante et l'on a :

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$$

Par récurrence immédiate on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$. Finalement on définit bien un produit scalaire sur E.

Exercice 2 - Convergence faible ($\star\star\star$)

Soit E un espace pré-hilbertien et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs. On dit que (u_n) converge *faiblement* vers

$u \in E$ si $\forall v \in E,\ \langle u_n, v\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle u, v\rangle$. Dans ce cas on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} u$

1. Montrer que si (u_n) converge faiblement alors sa limite faible est unique.

La démonstration est quasi-identique à celle de l'unicité de la limite dans le cas de la convergence forte (au sens usuel). On prends u, u' deux limites faibles de (u_n) puis on remarque que pour $v \in E$ et $\varepsilon > 0$ on a :

$$\begin{aligned} |\langle u - u', v\rangle| &= |\langle u - u_n + u_n - u', v\rangle| \\ &\leq |\langle u - u_n, v\rangle| + |\langle u_n - u', v\rangle| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

Où la dernière égalité n'est vraie qu'à partir d'un certain rang. Enfin on en déduit que $\langle u - u', v\rangle = 0$ pour tout vecteur $v \in E$ en particulier, $u - u' = 0$ d'où le résultat.

2. Montrer que si (u_n) converge fortement (au sens usuel) alors elle converge faiblement.

On utilise Cauchy-Schwarz en remarquant que pour $v \in E$ on a :

$$|\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\| \, \|v\|$$

Comme $\|u_n - u\|$ tend vers 0 on en déduit qu'il en est de même pour $|\langle u_n - u, v\rangle|$ d'où la convergence faible.

3. Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée. Montrer que (e_i) converge faiblement vers 0.

Il suffit de se rappeler l'inégalité de Bessel qui indique que pour $v \in E$ on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \langle v, e_i\rangle^2 \leq \|v\|^2$$

En particulier on remarque que la série $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \langle v, e_i\rangle^2$ est absolument convergente, donc convergente et notamment $\langle v, e_i\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire $\langle v, e_i\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle v, 0\rangle$, d'où le résultat.

4. On se propose maintenant de montrer que la réciproque de la question 2. est fausse en générale. On considère pour cela $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$$\langle f, \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, dt$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $f_n : t \mapsto \sin(nt)$, converge faiblement vers 0 mais pas fortement.

De façon immédiate (f_n) ne converge pas vers 0 en norme car elle ne converge pas simplement vers 0.

Enfin pour montrer qu'elle converge faiblement vers 0 on utilise la question précédente en montrant simplement qu'il s'agit d'une famille orthonormée. Soient donc $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, tel que $p \neq q$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle f_p, f_q \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(pt) \sin(qt)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((p-q)\, t) - \cos((p+q)\, t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\left[\frac{1}{p-q} \sin((p-q)\, t) \right]_0^{2\pi} - \left[\frac{1}{p+q} \sin((p+q)\, t) \right]_0^{2\pi} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi la famille est orthogonale, de plus si $p = q$ on remarque que dans le calcul précédent $\cos((p-q)\, t) = 1$ et donc $\|f_p\|^2 = 1$. Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3 - Minimisation d'une intégrale $(\star\star)$

Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et pour $f, g \in E$ on considère :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t) + f'(t)\, g'(t)\, dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire.

Cette forme est clairement symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$. De plus elle est bilinéaire par linéaire de la dérivée et de l'intégrale. Enfin, pour $f \in E$ on a :

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(t) + f'^2(t)\, dt \geq 0$$

De plus si $\langle f, f \rangle = 0$ en particulier $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\, dt = 0$ et il s'agit d'un résultat classique que de montrer que f est bien la fonction nulle. Ce dernier résultat se démontrant par contraposée.

2. On pose $V = \{f \in E /\ f'' = f\}$ et $W = \{f \in E /\ f(0) = 0 = f(1)\}$. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux.

Montrons tout d'abord qu'ils sont orthogonaux en considérant $f \in V$ et $g \in W$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \int_0^1 f(t)\, g(t) + f'(t)\, g'(t)\, dt \\
&= \int_0^1 f''(t)\, g(t)\, dt + \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, dt \\
&= [f'(t)\, g(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\, g(t)\, dt + \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, dt \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Où le seconde égalité provient du fait que $f \in V$ et la troisième est issu d'une IPP. Ainsi V et W sont bien orthogonaux. Enfin montrons qu'ils sont supplémentaires en considérant $f \in E$. On note alors g l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' & = y \\ y(0) & = f(0) \\ y(1) & = f(1) \end{cases}$$

On remarque alors d'une part que $g \in V$ et d'autre part que $f - g \in W$, comme $f = g + (f - g)$ on en déduit la supplémentarité de V et W.

3. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pour $f \in E$ telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$, déterminer la plus petite valeur possible de $\|f\|^2$.

On considère $f \in E$ telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$. D'après la supplémentarité de la question précédente, il existe un unique couple $(g, h) \in V \times W$ tel que $f = g + h$. De plus, comme on l'a montré précédemment, g est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' & = y \\ y(0) & = \alpha \\ y(1) & = \beta \end{cases}$$

Dont les solutions sont de la forme $y : t \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions initiales fournissent alors le systèmes :

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = \alpha \\ \lambda e + \mu e^{-1} & = \beta \end{cases}$$

Dont la solution est donnée par $\lambda = \frac{e^{-1}\alpha - \beta}{e^{-1} - e}$ et $\mu = \frac{\beta - e\alpha}{e^{-1} - e}$. Enfin comme la somme de V et W est orthogonal on a :

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|f - g\|^2$$

En particulier la norme est minimal lorsque $\|f - g\|^2 = 0$ c'est-à-dire lorsque $f = g$, autrement dit pour :

$$f(t) = \frac{e^{-1}\alpha - \beta}{e^{-1} - e} e^t + \frac{\beta - e\alpha}{e^{-1} - e} e^{-t}.$$

Exercice 4 - Somme d'itéré (★★★)

Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que u respecte le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

On pose $v = u - Id$.

1. Montrer que $\ker(v)^{\perp} = \operatorname{Im}(v)$.

On va montrer dans un premier temps que $\ker(v) = \operatorname{Im}(v)^{\perp}$, pour cela on considère $x \in \ker(v)$, qui vérifie donc $u(x) = x$, et $y \in \operatorname{Im}(v)$ qui s'écrit donc $y = v(z) = u(z) - z$ pour $z \in E$. On a dès lors :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, u(z) - z \rangle \\ &= (\langle x, u(z) \rangle - \langle x, z \rangle \\ &= \langle u(x), u(z) \rangle - \langle x, z \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que u préserve le produit scalaire. Ainsi $\ker(v) \subset \operatorname{Im}(v)$. Enfin par le théorème du rang on a :

$$\dim \operatorname{Im}(v) = \dim E - \dim \ker(v)$$

Puis par propriété de l'orthogonal :

$$\dim \operatorname{Im}(v)^{\perp} = \dim E - \dim \operatorname{Im}(v) = \dim \ker(v)$$

Ainsi de l'égalité des dimensions on en déduit l'égalité $\ker(v) = \operatorname{Im}(v)^{\perp}$, en passant à l'orthogonal on obtient alors le résultat demandé.

2. Soit

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$$

Démontrer que pour tout $x \in E$ la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\ker(v)$.

On sait que l'on a $E = \ker(v) \oplus \ker(v)^{\perp}$, soit donc $x = a + b$ une telle décomposition. Comme $a \in \ker(v)$, $u(a) = a$ et on peut vérifier par récurrence immédiate que $u_n(a) = a$. D'autre part calculons $u_n(b)$, en remarquant que d'après la question précédente, $b \in \mathrm{Im}(v)$ et donc $b = v(c) = u(c) - c$ on a alors :

$$\begin{aligned}
u_n(b) &= u_n(v(c)) \\
&= u_n(u(c) - c) \\
&= u_n(u(c)) - u_n(c) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(c) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{k}(c) \\
&= \frac{1}{n}\Big(u^n(c) - c\Big)
\end{aligned}$$

D'où comme u préserve le produit scalaire, elle préserve la norme et donc ses itérées également de sorte que :

$$\begin{aligned}
\|u_n(b)\| &\leq \frac{1}{n}\Big(\,\|u^n(c)\| + \|c\|\,\Big) \\
&= \frac{2 \times \|c\|}{n}
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $u_n(b)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi par somme de limite on en déduit le résultat.

Exercice 5 - Marche aléatoire sur un carré (⋆⋆⋆)

On considère dans le plan un carré ABCD. Une puce effectue une marche aléatoire sur ce carré en commençant au sommet A et de la façon suivante :

- Si elle est au sommet A on va au sommet B avec une probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet D avec probabilité $\frac{1}{3}$ et elle reste sur place avec probabilité $\frac{1}{6}$.
- Si elle est au sommet B on va au sommet C avec une probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet A avec probabilité $\frac{1}{3}$ et elle reste sur place avec probabilité $\frac{1}{6}$.
- Si elle est au sommet C on va au sommet D avec une probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et elle reste sur place avec probabilité $\frac{1}{6}$.
- Si elle est au sommet D on va au sommet A avec une probabilité $\frac{1}{2}$, au sommet C avec probabilité $\frac{1}{3}$ et elle reste sur place avec probabilité $\frac{1}{6}$.

On note A_k l'évènement « *la puce se trouve au sommet A après k étapes* », on définit de même B_k, C_k et D_k.

1. Trouver une relation de récurrence entre les probabilités des évènements A_{k+1}, A_k, B_k, C_k et D_k.

Commençons par remarquer que pour arriver en A on ne peut partir de C autrement dit l'évènement C_k n'intervient pas dans la probabilité de A_{k+1}. De sorte que par la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{k+1}) &= \mathbb{P}(A_{k+1} \cap A_k) + \mathbb{P}(A_{k+1} \cap B_k) + \mathbb{P}(A_{k+1} \cap D_k) \\
&= \mathbb{P}(A_{k+1} \mid A_k)\,\mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{k+1} \mid B_k)\,\mathbb{P}(B_k) + \mathbb{P}(A_{k+1} \mid D_k)\,\mathbb{P}(D_k) \\
&= \frac{1}{6}\mathbb{P}(A_k) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(D_k)
\end{aligned}$$

2. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(A_k)$ quand $k \to +\infty$. Interpréter le résultat.

Posons X_k le vecteur de $\mathbb{R}^4$ dont les coordonnées sont données par :

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}(B_k) \\ \mathbb{P}(C_k) \\ \mathbb{P}(D_k) \end{pmatrix}$$

De sorte que d'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_{k+1}) \\ \mathbb{P}(B_{k+1}) \\ \mathbb{P}(C_{k+1}) \\ \mathbb{P}(D_{k+1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\mathbb{P}(A_k) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(B_k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(D_k) \\ \frac{1}{6}\mathbb{P}(B_k) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(C_k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_k) \\ \frac{1}{6}\mathbb{P}(C_k) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(D_k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(B_k) \\ \frac{1}{6}\mathbb{P}(D_k) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C_k) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_k) \\ \mathbb{P}(B_k) \\ \mathbb{P}(C_k) \\ \mathbb{P}(D_k) \end{pmatrix} \\
&= A \times X_k
\end{aligned}$$

Où l'on a posé A la matrice donnée par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $X_{k+1} = AX_k$ de sorte que par une récurrence immédiate on trouve $X_k = A^k X_0$. Le vecteur X_0 est connu puisqu'il s'agit du vecteur $(1, 0, 0, 0)$, il ne reste qu'à déterminer A^k. Pour cela on peut chercher à diagonaliser A, malheureusement cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (elle l'est sur $\mathbb{C}$). Nous proposons alors une autre méthode :

Commençons alors par supposer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Notons alors $X_\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} X_k$, ainsi on remarque que $X_{k+1} \to X_\infty$ et par continuité de la multiplication matricielle on en déduit également que $AX_k \to AX_\infty$. Ainsi, dans le cas où elle existe, la limite X_∞ vérifie $X_\infty = AX_\infty$, autrement dit cette limite est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre 1.

L'étude de la diagonalisabilité de A montre que cette matrice admet pour valeur propre 1, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1+i}{6}$ et $\frac{1-i}{6}$. Ainsi 1 est valeur propre de multiplicité 1, comme le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est un vecteur propre on en déduit que l'espace propre $E_1 = \mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)$.

Enfin ce que l'on observe c'est qu'à toute étape k la puce se trouve bien soit en A, soit en B, soit en C ou soit en D. De sorte que la somme des coordonnée de X_k est toujours égale à 1 puisque ces évènements forment une partition de l'univers. De plus l'application qui à un vecteur de $\mathbb{R}^4$ associe la somme de ses coordonnées étant continue on en déduit que si (X_k) converge alors la somme des coordonnées de sa limite X_∞ vaut également 1. Comme c'est forcément un multiple de $(1, 1, 1, 1)$ on en déduit que $X_\infty = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$.

Montrons à présent que la suite (X_k) converge bien, d'après ce qui précède on pourras alors affirmer que la limite est bien le vecteur $X_\infty = \frac{1}{4}(1,1,1,1)$. Or la matrice A est semblable sur $\mathbb{C}$ à la matrice $\operatorname{diag}\left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1+i}{6}, \frac{1-i}{6}\right)$ comme toutes ces valeurs propres sont de modules strictement plus petit que 1 (sauf la valeur propre 1) on en déduit que, quitte à décomposer $\mathbb{R}^4$ en sous-espace caractéristiques, on peut affirmer que A^k converge vers la projection sur l'espace propre E_1 parallèlement à la somme des autres espaces caractéristiques. En particulier la suite de vecteur $\left(A^k X_0\right)$ converge vers la projection de X_0 sur E_1 parallèlement aux autres espaces caractéristiques. Ainsi on conclut que (X_k) converge bien vers X_∞.

Pour répondre à la question posée observons finalement qu'avec ce qui précède on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{4}$. L'étude précédente montre en effet qu'à la limite la position de la puce est enfaîte équiprobable sur les 4 sommets du carré. Cela ce conçoit aisément au vu de la symétrie des données du problème.

Exercice 6 - Transformation fonctionnelle $(\star\star\star)$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées, muni de la norme infini (*i.e* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$). Soit $a \in]-1,1[$ et $b \in \mathbb{R}$, pour $f \in E$ on considère $T(f)$ l'application définie par :

$$T(f)(x) = f(x) - af(bx)$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $f \in E$ montrons que $T(f) \in E$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$|T(f)(x)| \leq |f(x)| + |a|\,|f(bx)| \leq (1+|a|)\,\|f\|_\infty$$

On en déduit que $T(f)$ est bornée et donc un élément de E. De plus la linéarité de T se démontre de façon immédiate, ainsi on a bien $T \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que T est injective.

Soit $f \in \ker(T)$ on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = af(bx)$ d'où :

$$|f(x)| = |a|\,|f(bx)| \leq |a|\,\|f\|_\infty$$

et donc en passant à la borne supérieur on en déduit que $\|f\|_\infty \leq |a|\,\|f\|_\infty$ or $|a| < 1$, ainsi $\|f\|_\infty = 0$ et donc $f = 0$.

3. Pour $g \in E$ on pose $g_n : x \mapsto a^n g(b^n x)$.

   3.a. Montrer que $G = \sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En déduire que $G \in E$.

On remarque que pour $x \in \mathbb{R}$ on a $|g_n(x)| \leq |a|^n\,\|g\|_\infty$. Or $|a| < 1$ donc la série est bien normalement convegente.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N},\ g_n$ est continue par convergence uniforme (car normale) on en déduit que G est continue. De plus on a :

$$\begin{aligned}
|G(x)| &= \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a^n g(b^n x)\right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a^n|\,|g(b^n x)| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a|^n \, \|g\|_\infty \\
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{1-|a|}
\end{aligned}$$

Ainsi G est bornée et donc $G \in E$.

3.b. Calculer l'image de G par T. Conclure.

Soit $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} g_n(x) - a\sum_{n=0}^{N} g_n(bx) &= \sum_{n=0}^{N} a^n g(b^n x) - \sum_{n=0}^{N} a^{n+1} g\big(b^{n+1}x\big) \\
&= \sum_{n=0}^{N} a^n g(b^n x) - \sum_{n=1}^{N+1} a^n g(b^n x) \\
&= g(x) - a^{N+1} g\big(b^{N+1}x\big)
\end{aligned}$$

Les deux somme converge vers $G(x) - aG(bx) = T(G)(x)$. Et la dernière expression quant a elle tends vers $g(x)$ dans la mesure où l'autre terme tends vers 0. On en déduit donc que $T(G) = g$. Ce qui démontre que T est surjective et donc bijective.

4. L'application T^{-1} est-elle continue ?

D'après les question précédente on a :

$$T^{-1} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ g & \mapsto & G \end{array}$$

Et de plus comme $\|G\|_\infty \leq \frac{\|g\|_\infty}{1-|a|}$, on peut en déduire que T^{-1} est lipschitzienne et donc continue.