Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

L'intégrale $K_n = \int_0^{+\infty} f_n$ est impropre en $+\infty$.

$f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$ qui ne change pas de signe, et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{2n}}$ converge d'après le critère de Riemann, car $2n \geq 2 > 1$.

Donc par comparaison l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ converge.

Donc l'intégrale K_n converge.

Soit $n \geq 2$. Pour tout $t \geq 1$, $1+t^2 \geq 1 > 0$ donc $(1+t^2)^n > 0$

donc $0 \leq \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$, et comme $1 \leq 2t$, $0 \leq \dfrac{1}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{2t}{(1+t^2)^n}$

Par croissance de l'intégrale, si $a > 1$, $0 \leq \int_1^a \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \int_1^a \dfrac{2t\,dt}{(1+t^2)^n}$.

$$\int_1^a \frac{2t\,dt}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{-1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}}\right]_1^a = \frac{1}{(n-1)}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{(1+a^2)^{n-1}}\right) \quad \text{car } n-1>0.$$

$$\xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} \quad \text{car } (1+a^2)^{n-1} \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$$

Les inégalités larges passent à la limite $a\to+\infty$, d'où $0 \leq \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} \leq \dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}}$

D'où $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} = \underset{n\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{(n-1)2^{n-1}}\right) = \underset{n\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, $1+t^2 \leq 2$ donc $(1+t^2)^n \leq 2^n$

donc $\dfrac{1}{(1+t^2)^n} \geq \dfrac{1}{2^n}$ (car $(1+t^2)^n > 0$).

Par croissance de l'intégrale, $J_n = \int_0^1 \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} \geq \int_0^1 \dfrac{dt}{2^n} = \dfrac{1}{2^n}$

$K_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} = \int_0^1 \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} + \int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} = J_n + \underset{n\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$ d'après 1

Or $0 \leq \dfrac{1}{2^n} \leq J_n$ donc $\dfrac{1}{2^n} = \underset{n\to\infty}{O}(J_n)$

d'où $K_n = J_n\left(1 + \underset{n\to\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = J_n(1 + \underset{n\to\infty}{o}(1)) \underset{n\to\infty}{\sim} J_n$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ sont de classe C^1

sur $\mathbb{R}^+$, $(uv)(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^n} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ et $(uv)(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t}{t^{2n}} = \dfrac{1}{t^{2n-1}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ car $2n>1$.

D'après le théorème d'intégration par parties sur un intervalle quelconque,

$\int_0^{+\infty} u'v = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} uv'$ (car l'intégrale $\int_0^{+\infty} u'v = K_n$ converge d'après 1.)

donc $K_n = \int_0^{+\infty} u'v = -\int_0^{+\infty} t(-n)2t \dfrac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = 2n \int_0^{+\infty} \dfrac{t^2\,dt}{(1+t^2)^{n+1}}$

$= 2n \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right)dt = 2n \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{1}{(1+t^2)^n} - \dfrac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\right)dt$

car $\forall t \geq 0$, $1+t^2 > 0$

Or d'après 1 les intégrales $K_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $K_{n+1} = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}$ convergent.

D'où $K_n = 2n\left(\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^n} - \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(1+t^2)^{n+1}}\right) = 2n(K_n - K_{n+1})$.

Donc $\dfrac{1}{2n} K_n = K_n - K_{n+1}$, d'où $K_n = K_{n+1} + \dfrac{1}{2n} K_n$

4. D'après 3, $K_{n+1} = K_n - \frac{1}{2n} K_n = K_n \left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$ donc $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} K_{n+1}$.

Mieux : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n$ d'après 3.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} K_1$:

le cas $n = 1$ est immédiat, et si $K_n = \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} K_1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque,

alors $K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n = \frac{2n(2n-1)}{4n^2} \cdot \frac{(2n-2)!}{4^{n-1}(n-1)!^2} K_1 = \frac{(2n)!}{4^n n!^2} K_1$

D'après la formule de Stirling, $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Donc $\frac{(2n)!}{4^n n!^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4^n}\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n\right)^2$

$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4^n}\frac{2\sqrt{\pi n}}{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\cdot\frac{e}{n}\right)^{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4^n}\frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$

Soit $x > 0$. $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^x = \operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ d'où $K_1 = \frac{\pi}{2}$.

Comme $K_1 \neq 0$, on a $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} K_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{(2n)!}{4^n n!^2} K_1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\pi}{2}$

D'où $K_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$

5/ On pose le CDV $u = t\sqrt{n}$ qui est bien de classe C^1. D'où $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n}\frac{du}{\sqrt{n}}$.

Donc $\sqrt{n} J_n = \int_0^{+\infty} f_n(u)\,du$, où $f_n(u) = \begin{cases} \frac{1}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n} & \text{si } u \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } u > \sqrt{n} \end{cases}$.

Chaque fonction f_n est cpm et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus f_n CVS vers $f : u \mapsto e^{-u^2}$.

En effet, soit $u \in [0,+\infty[$: APCR, $u \leq \sqrt{n}$, d'où $f_n(u) = \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-u^2}$.

De plus, $\forall n, \forall u$, $|f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u^2}$ car ♡. Et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du$ converge.

D'ap. le théo. de cv dominée, $\int_0^{+\infty} f_n(u)\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} f(u)\,du$.

Donc $\boxed{\sqrt{n} J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du}$

6) D'ap. les q. 2 et 4, $\sqrt{n} J_n \sim \sqrt{n} K_n \sim \sqrt{n}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Or $\sqrt{n} J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$

Par unicité de la limite, $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-u^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

♡ $\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{u^2}{n}\right)^k \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{u^2}{n} = 1 + u^2$.