Corrigé de la colle n$^{\text{o}}$ 12

Séries de fonctions & produits scalaires

25 décembre 2024

Exercice 1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\cos^n(x) \cdot \sin(nx)$.

1. Montrer que $f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) \cdot \cos\left[(n+1)x\right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$.
3. Soit, pour tout $x \in [0, \pi]$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
   (a) Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi[$ et que
   $$\forall x \in]0, \pi[, \quad S'(x) = -1.$$
   (b) Calculer $S(x)$ pour chaque $x \in [0, \pi]$.
   (c) La convergence de la série $\sum f_n$ est-elle uniforme sur $[0, \pi]$?

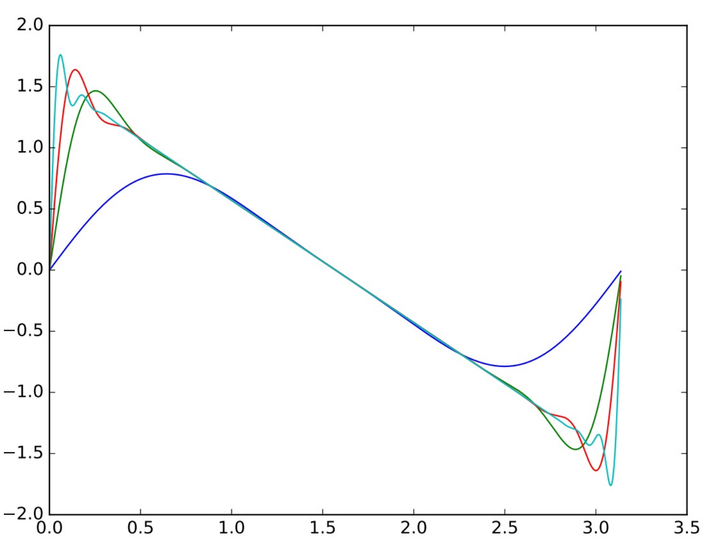

Figure 1 – Les fonctions $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k$ pour $n \in \{2, 10, 20, 50\}$

1. Avec un peu de trigo...
2. On veut montrer que, pour chaque $x \in [0, \pi]$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge :

— si $x=0$ ou $x=\pi$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x)=0$, d'où la série $\sum f_n(x)$ converge ;

— si $x \in]0,\pi[$, alors $|f_n(x)| \leq |\cos x|^{n-1}$. Or la série géométrique $\sum |\cos x|^{n-1}$ converge car $|\cos x|<1$. D'où la série $\sum |f_n(x)|$ converge, donc la série $\sum f_n(x)$ converge (absolument).

Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,\pi]$.

3. (a) On applique le théorème de dérivation terme à terme sur un segment $[a,b] \subset]0,\pi[$:

   — chaque fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ car elle y est dérivable et sa dérivée, calculée en 1, est continue ;

   — la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ d'après 2 ;

   — la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$ car $(*)$;

   d'où la fonction S est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et, pour tout $x \in [a,b]$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = -1$ car $(**)$. Ceci est vrai sur tout segment $[a,b] \subset]0,\pi[$, donc vrai sur $]0,\pi[$.

   $(*)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a,b],\ |f_n'(x)| \leq |\cos x|^{n-1} \leq q^{n-1}$, où $q = \max\limits_{x\in[a,b]} |\cos x|$. Ce *max* existe car la fonction $x \mapsto |cos(x)|$ est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est donc bornée et atteint ses bornes. De plus $|q|<1$, d'où la série $\sum q^n$ converge, d'où la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement, donc uniformément sur $[a,b]$.

   $(**)$ $f_n(x) = \operatorname{Re}\left(\cos^{n-1}(x)\mathrm{e}^{i(n+1)x}\right)$. D'où $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\cos^{n-1}(x)\mathrm{e}^{i(n+1)x}\right)$.

   Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos^{n-1}(x)\mathrm{e}^{i(n+1)x} = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos x\mathrm{e}^{ix}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\frac{1}{1-\cos(x)\mathrm{e}^{ix}} = \mathrm{e}^{i2x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x - i\sin x\cos x} = \mathrm{e}^{i2x}\cdot$ $\displaystyle\frac{1}{-i\cdot\sin x\cdot\mathrm{e}^{ix}} = \frac{i\mathrm{e}^{ix}}{\sin x} = \frac{-\sin x + i\cos x}{\sin x} = -1 + i\cot(x)$. Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -1$.

   (b) Si $x=0$ ou $x=\pi$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(x)=0$, d'où $S(x)=0$.
   Pour tout $x \in]0,\pi[$, $S'(x)=-1$, d'où $S(x)=-x+\text{cte}$. Or, pour chaque $n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(\pi/2)=0$, d'où cte $=\pi/2$. Donc $S(x)=\frac{\pi}{2}-x$ pour tout $x\in]0,\pi[$.

   (c) Chaque fonction f_n est continue sur $[0,\pi]$ mais la fonction S ne l'est pas, donc la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas uniforme sur $[0,\pi]$.

Exercice 2 (Matrices de Gram & matrices de Hilbert)**.** Soit E un espace préhilbertien. La MATRICE DE GRAM d'une famille $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de n vecteurs de E est la matrice

$$G(v_1,v_2,\cdots,v_n) = \begin{pmatrix} <v_1|v_1> & <v_1|v_2> & \cdots & <v_1|v_n> \\ <v_2|v_1> & <v_2|v_2> & \cdots & <v_2|v_n> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <v_n|v_1> & <v_n|v_2> & \cdots & <v_n|v_n> \end{pmatrix}.$$

1. Soient u et v deux vecteurs de E. Montrer que le déterminant de la matrice

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} <u|u> & <u|v> \\ <v|u> & <v|v> \end{pmatrix}$$

   est positif. À quelle condition (nécessaire ? suffisante ?) est-il strictement positif ?

2. Soit une famille $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ de n vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de dimension n de E.

   (a) Soient $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de F et la matrice $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i \qquad \text{pour chaque } j \in [\![1,n]\!].$$

   Montrer que $G(v_1,v_2,\cdots,v_n) = A^T\cdot A$.

   (b) Montrer que $\det G(v_1,v_2,\cdots,v_n)\geq 0$.

   (c) Montrer que les matrices A et $G(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ ont le même rang.

(d) En déduire que le rang de $G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est égal à la dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.

3. On suppose que $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E et on note p la projection orthogonale de E sur F.
   (a) Soit z un vecteur de $F^\perp$. Exprimer $\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, z)$ en fonction de $\|z\|$ et $\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.
   (b) Soient y un vecteur de F et z un vecteur de $F^\perp$. Montrer que
   $$\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, y+z) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, v_2, \cdots, v_n).$$
   (c) Soit x un vecteur de E. Montrer que la distance $d(x, F) = \|x - p(x)\|$ du vecteur x au sous-espace vectoriel F est égale à
   $$\sqrt{\frac{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, x)}{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n)}}.$$

4. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $< P|Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.
   (a) Montrer que la matrice
   $$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix},$$
   appelée MATRICE DE HILBERT, est inversible.
   (b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par
   $$f(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = \int_0^1 \left(t^n - a_0 - a_1 t - \cdots - a_{n-1}t^{n-1}\right)^2 \,dt$$
   possède un minimum égal à $\dfrac{\det H_{n+1}}{\det H_n}$.

---

1. $\det G(u,v) = \begin{vmatrix} < u|u > & < u|v > \\ < v|u > & < v|v > \end{vmatrix} = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - (< u|v >)^2$ est supérieur ou égal à zéro car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz
   $$| < u|v > | \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$
   Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, les deux vecteurs sont colinéaires. Donc $\det G(u,v) > 0$ si, et seulement si, la famille (u, v) est libre.
2. (a) Notons $M = G(v_1, v_2, \cdots, v_n)$:
   $m_{ij} =< v_i|v_j >=< \displaystyle\sum_{p=1}^n a_{pi}e_p | \sum_{q=1}^n a_{qj}e_q >= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pi}a_{qj} < e_p|e_q >= \sum_{p=1}^n a_{pi}a_{pj}$ car $< e_p|e_q >= \delta_{pq}$. Donc $M = A^T \cdot A$.
   (b) $\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \det(A^T A) = \det A^T \cdot \det A = (\det A)^2$ est positif.
   (c) ▷ **exo 10 du TD 2**. Soit un vecteur-colonne X :
   – si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0$, d'où $A^T AX = A^T 0 = 0$, d'où $X \in \mathrm{Ker}(A^T A)$, donc $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^T A)$;
   – si $X \in \mathrm{Ker}(A^T \cdot A)$, alors $A^T AX = 0$, d'où $\|AX\|^2 = X^T A^T AX = X^T 0 = 0$, d'où $(AX)^T(AX) = 0$, d'où $AX = 0$, d'où $X \in \mathrm{Ker}(A)$, donc $\mathrm{Ker}(A^T \cdot A) \subset \mathrm{Ker}(A)$.
   De l'égalité des noyaux $\mathrm{Ker}(A^T \cdot A) = \mathrm{Ker}(A)$ et du théorème du rang, on déduit que les matrices A et $G(v_1, v_2, \cdots, v_n) = A^T \cdot A$ ont le même rang.
   (d) La matrice A est la matrice des coordonnées de la famille de vecteurs $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ dans la base $(e_1, \cdots e_n)$. Son rang est donc égal à la dimension de $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$.

3. (a) $G(v_1, v_2, \cdots, v_n, z) = \begin{pmatrix} & & & < v_1|z > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|z > \\ < z|v_1 > & \cdots & < z|v_n > & < z|z > \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} & & 0 \\ G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & 0 \\ 0 & \cdots \quad 0 & \|z\|^2 \end{pmatrix}$,

donc $\det G(v_1, \cdots, v_n, z) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n)$.

(b)

$$\begin{aligned} & \det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, y+z) \\ &= \begin{vmatrix} & & & < v_1|y+z > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|y+z > \\ < y+z|v_1 > & \cdots & < y+z|v_n > & < y+z|y+z > \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} & & & < v_1|y > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|y > \\ < y|v_1 > & \cdots & < y|v_n > & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} & & & < v_1|y > \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & < v_n|y > \\ < y|v_1 > & \cdots & < y|v_n > & \|y\|^2 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & G(v_1, \cdots, v_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ < y|v_1 > & \cdots & < y|v_n > & \|z\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \det G(v_1, \cdots, v_n, y) + \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n). \end{aligned}$$

Or la famille $(v_1, \cdots, v_n, y)$ est liée, d'où $\det G(v_1, \cdots, v_n, y) = 0$, donc

$$\det G(v_1, \cdots, v_n, y+z) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n).$$

(c) $x = y + z$, où $y = p(x) \in F$ et $z = x - p(x) \in F^\perp$, d'où $d(x, F) = \|z\| = \sqrt{\|z\|^2}$.
Or $\det G(v_1, \cdots, v_n, x) = \|z\|^2 \cdot \det G(v_1, \cdots, v_n)$ d'après (3b) et $\det G(v_1, \cdots, v_n) \neq 0$ car la famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre. Donc $\|z\| = \sqrt{\dfrac{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n, x)}{\det G(v_1, v_2, \cdots, v_n)}}$.

4. (a) $< X^i|X^j >= \displaystyle\int_0^1 t^i \cdot t^j \, dt = \frac{1}{i+j+1}$, d'où $H_n = G(1, X, \cdots, X^{n-1})$. D'où le rang de la matrice H_n est égal à la dimension de $\mathrm{Vect}(1, X, \cdots, X^{n-1})$. Or la famille de polynômes $(1, X, \cdots, X^{n-1})$ est libre. D'où $\mathrm{rg}\, H_n = n$, donc H_n est inversible.

(b) $f(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}) = \displaystyle\int_0^1 \left(t^n - a_0 - a_1 t - \cdots - a_{n-1} t^{n-1}\right)^2 \, dt = \|X^n - (a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1})\|^2$ possède un minimum égal à $\|X^n - p(X^n)\|^2 = [d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])]^2$, où p est la projection orthogonale de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ sur le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Donc $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \sqrt{\dfrac{\det G(1, \cdots, X^{n-1}, X^n)}{\det G(1, \cdots, X^{n-1})}} = \sqrt{\dfrac{\det H_{n+1}}{\det H_n}}$.