Feuille de T.D. n° 10

Variables aléatoires

Exercice 1. 1. Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi de probabilité vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n+1) = \frac{4}{n+1} P(X = n).$$

Déterminer la loi de probabilité de X, c'est-à-dire calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient un réel $p \in]0,1[$ et une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = p \cdot P(X \geq n).$$

Quelle est cette loi de probabilité ?

Exercice 2 (Loi de Poisson)**.** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. Exprimer l'événement « X prend une valeur paire » comme une union disjointe. De même pour l'événement « X prend une valeur impaire ».
2. Calculer la probabilité que la valeur de X soit paire et calculer la probabilité que la valeur de X soit impaire. Comparer ces deux probabilités.
3. Soit n un entier naturel tel que $n+1 > \lambda$. Montrer que :

$$P(X \geq n) \leq \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}}.$$

4. En déduire que : $P(X \geq n) \underset{n \to \infty}{\sim} P(X = n)$.
5. Montrer que : $P(X > n) = \underset{n \to \infty}{\mathrm{o}} \left(P(X = n)\right)$.

Exercice 3 (tiré de Mines Ponts Maths 2 PC 2017)**.**

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, alors $X = 5$. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on introduit l'univers $\Omega = [\![1, n]\!]^{n+1}$.

1. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$: montrer que l'événement $(X = k)$ n'est pas vide et que sa probabilité $P(X = k)$ n'est pas nulle.
2. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(X > k) \neq 0$ et :

$$P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k) \cdot P(X > k).$$

3. Pour chaque $k \in [\![1, n-1]\!]$, déterminer $P(X > k+1 | X > k)$.
4. En déduire $P(X > k)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 4 (Loi binomiale, espérance & variance)**.** Un marcheur se déplace sur une droite en faisant un pas vers la droite avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n sa position après n pas et D_n le nombre de pas vers la droite parmi ces n pas.

Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire D_n. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_n.

Exercice 5 (Le problème du collectionneur, loi géométrique & espérance)**.** Chaque paquet de lessive de la marque *Bonux* contient un cadeau, choisi au hasard parmi n cadeaux équiprobables. On note S_k le nombre de paquets achetés jusqu'à obtenir k cadeaux différents. (Par suite $S_1 = 1$ et, pour chaque $k \geq 2$, S_k est une variable aléatoire.)

Figure 1 – Bonux

1. Pour chaque $k \in [\![2, n]\!]$, soit $X_k = S_k - S_{k-1}$. Déterminer la loi de probabilité de X_k.
2. En déduire l'espérance $E(S_n)$ et montrer que $E(S_n) \underset{n\to\infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.

Exercice 6 (Série génératrice & espérance)**.** Au concours de saut en hauteur, Zébulon tente de franchir une à une les hauteurs $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$ Au premier échec, Zébulon est éliminé. La probabilité de franchir chaque hauteur n est $\frac{1}{n}$. On suppose les sauts indépendants et on note X le numéro du dernier saut réussi par Zébulon.

Figure 2 – Zébulon

1. Proposer un univers Ω et déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de X, vérifier par le calcul que $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} P(X = k) = 1$. Qu'en déduire ?
3. Ecrire la série génératrice de la variable aléatoire X, montrer que son rayon de convergence est infini et que :
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad G_X(t) = \frac{t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 1}{t}.$$
.

4. En déduire que la variable X est d'espérance finie et calculer $E(X)$, c'est-à-dire la hauteur que peut espérer franchir Zébulon.

Exercice 7 (Loi binomiale, inégalité de Markov & inégalité de concentration)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels p et q dans $]0,1[$ tels que $q \geq p$ et S_n une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Soit un réel $u \geq 0$. Rappeler l'espérance $E(S_n)$. Montrer que la variable aléatoire e^{uS_n} est d'espérance finie et que $E(\mathrm{e}^{uS_n}) = (1-p+p\mathrm{e}^u)^n$.
2. Montrer que
$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p+p\mathrm{e}^u)^n}{\mathrm{e}^{\frac{p+q}{2}nu}}.$$
3. On note $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ u \mapsto \ln(1-p+p\mathrm{e}^u)$.
   (a) Exprimer $g''(u)$ sous la forme $\dfrac{\alpha(u)\beta(u)}{(\alpha(u)+\beta(u))^2}$.
   (b) Montrer que $g''(u) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que :
$$\forall u \geq 0, \quad \ln(1-p+p\mathrm{e}^u) \leq pu + \frac{u^2}{8}.$$
4. Prouver l'inégalité de concentration suivante :
$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \mathrm{e}^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Exercice 8 (Fonction de répartition & continuité décroissante)**.** Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. La **fonction de répartition** de X est la fonction définie par
$$F_X \ : \mathbb{R} \to [0,1],\ a \mapsto F_X(a) = P(X \leq a).$$

1. Montrer que la fonction F_X est croissante.
2. En utilisant la fonction F_X, calculer $P\left(a < X \leq b\right)$ pour tout $a \leq b$.
3. Soit (a_n) une suite de réels tendant vers $-\infty$ en décroissant. En utilisant la suite des événements $A_n = (X \leq a_n)$, montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
4. Etudier $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)$.
5. Soit un réel a. Soit a_n une suite de réels tendant vers a en décroissant. En utilisant la suite des événements $B_n = (X \leq a_n)$, montrer que F est continue à droite en a.
6. En utilisant la suite des événements $C_n = \left(a - \frac{1}{n} < X \leq a\right)$, montrer que $F(a) = \lim\limits_{x\to a^-} F(x) + P(X = a)$.

   À quelle condition la fonction de répartition est-elle continue en a ?