D.S. n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques

Durée : 4 heures.
Cet énoncé contient 3 exercices extraits de problèmes de concours.
Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (tiré de CCP Maths PC 2015)**.**

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, une variable aléatoire S_n qui suit une loi de Poisson de paramètre n : $S_n(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbf{P}(X = k) = e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

1) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(t) = \frac{e^{-t}t^n}{n!}.$$

- **a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau des variations de la fonction f_n.
- **b)** Déterminer un équivalent de $f_n(n)$ quand n tend vers ∞.

2) Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance $\mathbf{V}(S_n)$ de la variable aléatoire S_n et déterminer celles de la variable aléatoire $S_n^* = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

3)
- **a)** Rappeler l'hypothèse et l'expression du reste $R_n(a, b)$ de la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + R_n(a, b)$$

pour une fonction f sur un intervalle $[a, b]$.

- **b)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n^* \leq 0) = 1 - \displaystyle\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}dt$.
- **c)** Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

- **d)** En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire S_n.

- **a)** Montrer que la fonction $\mathbf{G}_{S_n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $\mathbf{G}_{S_n}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- **b)** En déduire que, pour tout $t > 0$, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

- **c)** Étudier, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*})$.

Exercice 2 (tiré de MINES-PONTS MATHS 2 MPI 2023)**.**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, \mathrm{d}t$.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2) Étudier le sens de variation de la fonction f.

3) Montrer que la fonction f est strictement positive.

4) Montrer que, pour tout réel $x > -1$,

$$(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2).$$

5) Étudier la limite de $f(x)$ quand le réel x tend vers -1.

6) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

7) Montrer que $f(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale généralisée $D_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin t))^n \, \mathrm{d}t$ est convergente.

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u} - 1}} \, \mathrm{d}u.$$

10) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} u^n \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u$ converge et calculer sa valeur.

11) Montrer que $(-1)^n D_n - n! = o(n!)$ et en déduire un équivalent de D_n.

12) Soient $x > -1$ et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$f_n(t) = \frac{(\ln(\sin t))^n}{n!} x^n.$$

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer sa somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

13) En utilisant un théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, prouver que

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n}{n!} x^n.$$

Exercice 3 (tiré de CCP MATHS 1 MP 2015)**.**

Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, n un entier naturel non nul et x un réel de $[0,1]$. On pose le polynôme :

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}.$$

1) Soit S_n une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$. Montrer que :

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \mathbf{P}(S_n = k).$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(u,v) \in [0,1]^2$:

$$|v-u| < \alpha \implies |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

Soit un tel α. On note désormais I_α et J_α les parties de $[\![0,n]\!]$ définies par :

$$k \in I_\alpha \iff \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha \qquad \text{et} \qquad k \in J_\alpha \iff \left|\frac{k}{n} - x\right| < \alpha.$$

3) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k \in J_\alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \mathbf{P}(S_n = k) \leq \varepsilon.$

4) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k \in I_\alpha} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \mathbf{P}(S_n = k) \leq 2\,\|f\|_\infty\, \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \alpha \right).$

5) Rappeler l'espérance $\mathbf{E}(S_n)$ et la variance $\mathbf{V}(S_n)$ de la variable aléatoire S_n.

6) Prouver que : $\mathbf{P}(|S_n - nx| \geq n\alpha) \leq \dfrac{1}{4n\alpha^2}.$

7) Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1], \quad |B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

8) Conclure.