Colle n° 13

Séries entières

Exercice 1 (tiré de CCINP 2018 MP Math 1)**.** Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. En utilisant une série entière, montrer que la suite des réels
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$$
tend vers le réel I et proposer un encadrement de $|I - S_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que
$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}$$
en utilisant la suite des fonctions
$$f_n \,:\, x \mapsto \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Exercice 2 (tiré de CCINP Maths 1 MP 2019)**.**

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1.

Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, +1[$, $f_n(x) = a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$.

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$ qui n'est pas une série entière.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série numérique $\sum a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

On note, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. Soit un réel $b \in]0, 1[$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[-b, b]$.
En déduire que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1, 1[$ et exprimer, pour tout $x \in]-1, +1[$, $f'(x)$ comme la somme d'une série.
3. En utilisant une série entière, déterminer la valeur ℓ de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
4. Dans cette question, $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$.
   (a) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   (b) Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +1[$, $h_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}}$. Montrer que la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.
   (c) En déduire, en fonction de ℓ, un équivalent de $f(x)$ quand x tend 1^-.