Colle 13 Séries entières

LEGEAIS Paul

<u>Exercice 1.</u> On pose $f : x \mapsto \sum_{n\geq 1} (\ln n) x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$.

1. Déterminer les rayons de convergence de f et de g.
2. Montrer que g est définie et continue sur $[-1, 1[$.
3. Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
4. Montrer que f est continue sur $[-1, 1[$ et trouver des équivalents de f et g en 1.

Solution **1.**

1. *Le critère de D'Alembert montre que les rayons de convergence de ces séries est* 1 *dans les deux cas.*
2. *Sur l'intervalle* $[-1,0]$*, la série définissant* g *est une série alternée et comme* $-\ln(1-\frac{1}{n})<0$ *est décroissante et tend vers* 0*, on montre le reste* R_n *d'ordre* n *vérifie*

$$\forall x\in[-1,0],\ |R_n|\leq|\ln(1-\frac{1}{n+1})x^{n+1}|\leq|\ln(1-\frac{1}{n+1})|$$

   ce qui montre que R_n *converge uniformément vers* 0 *sur* $[-1,0]$*. La limite est donc continue sur* $[-1,0]$*.*
3. *Remarquons que si* $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ *converge sur* $]-1,1[$*, alors*

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=a_1+\sum_{n\geq 2}(a_n-a_{n-1})x^n$$

   Si $a_n=\ln n$*, alors* $a_1=0$ *et*

$$\forall n\geq 2,\ b_n=a_n-a_{n-1}=\ln(1-\frac{1}{n})$$

   ce qui montre que $(1-x)f(x)=g(x)$*, et* f *se prolonge par continuité en* -1*.*
4. *On a* $\ln(1-\frac{1}{n})\sim-\frac{1}{n}$*. Calculons*

$$g(x)-(\ln(1-x)+x)=\sum_{n\geq 2}\left(\ln(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n})\right)x^n$$

   Mais

$$0\geq\ln(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2},$$

   donc la série $\sum_{n\geq 2}\left(\ln(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{n})\right)x^n$ *est normalmeent convergente sur* $[-1,1]$ *et sa valeur* α *en* 1 *vérifie* $\alpha<0$*. On en déduit que* $g(x)-\ln(1-x)+x\sim_1\alpha=_1 o(\ln(1-x))$*.*
   En conclusion, $g(x)\sim_1\ln(1-x)$ *et* $f(x)\sim_1\frac{\ln(1-x)}{1-x}$*.*

LEBRETON Louis

Exercice 2. Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivable.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} f(\frac{1}{k})$$

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n x^n$ et F sa somme.

1. Préciser R et F dans chacun des cas suivants :
   (a) f est constante
   (b) $f : x \to (qx - 1)$ où q est un entier naturel non nul.
2. De façon générale, exprimer R à l'aide de f.
3. On suppose que $f(0) > 0$.
   Montrer que la suite u est de signe constant à partir d'un certain rang.
4. Etudier la convergence de la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $0 \leq |f(0)| < 1$
   (b) $|f(0)| > 1$
5. On suppose désormais que $f(0) = 1$ et que $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.
   (a) Soit la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $v_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{n^a}$
   Montrer qu'il existe une unique valeur du réel a pour laquelle la suite v admet une limite finie et non nulle.
   Exprimer a en fonction de f'.
   (b) Donner une équivalent de u_n.
   (c) Déterminer l'ensemble de définition de F

Solution **2.**

1. (a) *Quand* $f = c \neq 0$: $R = \dfrac{1}{|c|}$ *et* $F(x) = \dfrac{1}{1-cx}$.

   (b) $R = +\infty$ *et* $F(x) = (1+x)^{q-1}$.

2. $R = +\infty$ *s'il existe* k *tel que* $f(\frac{1}{k}) = 0$ *et* $R = \dfrac{1}{|f(0)|}$ *sinon.*

3. *Il existe un rang* k_0 *au delà duquel* $f(\frac{1}{k}) > 0$

4. (a) *La suite tend vers* 0.

   (b) *La suite tend vers* $+\infty$.

5. (a) *Passer par la série* $\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$: $a = f'(0)$.

$$\sum \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{(n+1)^a}\right) - \ln\left(\frac{u_n}{n^a}\right) = \ln\left(f(1/(n+1)) + a(\ln n - ln(n+1)\right)$$
$$= \frac{f'(0)}{n} - a \times \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

   Car $f(\frac{1}{n+1}) = f(0) + \frac{1}{n+1} f'(0) + O((\frac{1}{n^2})$, *avec* $f(0) = 1$.
   On en déduit que la série $\sum_n \ln v_{n+1} - \ln v_n$ *converge vers* α *ssi* $f'(0) = a$. *Et alors* v_n *converge vers* $L = e^l$

   (b) $u_n \sim Ln^a$.

   (c) *Le rayon est* 1 : *reste l'étude aux bornes* 1 *et* -1. *On trouve :*
   -> *Si* $a \geq 0$: $D =]-1, 1[$ *par divergence grossière.*
   -> *Si* $a < -1$: $D = [-1, 1]$ *par convergence absolue.*
   -> *Si* $-1 \leq a < 0$: $D = [-1, 1[$ *par SATP divergente (en* 1*) et Th spécial des séries alternées à partir d'un certain rang (en* -1*).*

Quentin KOBUS

Exercice 3. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1. Quel est son rayon de convergence, que l'on notera R ? Y-a-t-il convergence aux bornes de l'intervalle de définition ?
2. Sur quel intervalle la fonction f est-elle *a priori* continue ? Démontrer qu'elle est en réalité continue sur $[-R, R]$.
3. Exprimer, au moyen des fonctions usuelles, la somme de la série dérivée sur $]-R, R[$. En déduire une expression de f sur $]-R, R[$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Solution **3.** 1. *Posons* $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}x^{2n+1}$. *Alors* $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n(2n+1)x^2}{(n+1)(2n+3)} \to |x|^2$. *Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, la série entière est convergente pour* $|x| < 1$ *et divergente pour* $|x| > 1$. *Son rayon de convergence est donc 1. De plus, pour* $x = 1$, *la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$ *est (absolument) convergente (on peut aussi prouver qu'elle converge d'après le critère des séries alternées). De même, pour* $x = -1$, *la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n(2n+1)}$ *est convergente.* f *est donc définie sur* $[-1, 1]$.

2. *La théorie des séries entières nous dit que* f *est continue sur son intervalle ouvert de convergence, c'est-à-dire sur* $]-1, 1[$. *Pour prouver la continuité sur* $[-1, 1]$, *on va prouver qu'il y a convergence normale sur tout l'intervalle* $[-1, 1]$. *En effet, pour tout* $x \in [-1, 1]$, *on a*

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{n(2n+1)}$$

et le membre de droite de l'inégalité est le terme général d'une série numérique convergente (insistons sur le fait qu'il ne dépend pas de x*). La série est donc normalement convergente sur* $[-1, 1]$. *Comme chaque fonction* $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(2n+1)}$ *est continue sur* $[-1, 1]$, *on en déduit que* f *est continue sur* $[-1, 1]$.

3. *La série dérivée est, pour* $|x| < 1$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{2n} = \ln(1 + x^2).$$

En effet, pour $x \in]-1, 1[$, *on a* $0 \leq x^2 < 1$ *et on est bien dans le domaine de validité du développement en série entière de* $\ln(1 + u)$. *Puisque* $f(0) = 0$, *on en déduit* $f(x) = \int_0^x \ln(1 + t^2)dt$. *On calcule cette intégrale en effectuant une intégration par parties :*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^x 1 \times \ln(1 + t^2)dt \\
&= \left[\frac{t}{1 + t^2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1 + t^2}dt \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}dt \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2\int_0^x \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right)dt \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2\left[t - \arctan(t)\right]_0^x \\
&= x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x.
\end{aligned}$$

4. *L'égalité* $f(x) = x\ln(1 + x^2) - 2x + 2\arctan x$ *n'est valable que pour* $x \in]-1, 1[$. *Mais le membre de droite comme celui de gauche sont continus en 1. Par continuité, l'égalité précédente reste vraie sur* $[0, 1]$ *tout entier. On conclut que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = f(1) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

XXX

Exercice 4. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence de f.
2. Démontrer que f est continue sur son intervalle de convergence.
3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur l'intervalle $]-1, 1[$.
4. Déduire des questions précédentes la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Solution **4.** 1. *Le rayon de convergence de la série entière est 1. De plus, puisque*

$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

on a aussi convergence en 1 *et* -1*. L'intervalle de convergence est donc* $[-1,1]$*.*

2. *Les théorèmes usuels concernant les séries entières ne donnent la continuité que sur l'intervalle ouvert* $]-1,1[$*. Si on veut obtenir la continuité sur l'intervalle fermé, il faut aller plus loin ! Pour cela, on va montrer la convergence normale de la série sur l'intervalle* $[-1,1]$*. En effet, pour tout* $x \in [-1,1]$ *et tout* $n \geq 2$*, on a*

$$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

et cette dernière série est convergente. Puisque chaque fonction $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$ *est continue sur* $[-1,1]$*, on en déduit la continuité de* f *sur* $[-1,1]$*.*

3. f *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et on a*

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x).$$

Par intégration, pour tout $x \in]-1,1[$*, on a*

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C.$$

La constante C *se calcule en remarquant que* $f(0) = 0 = C$*.*

4. *L'égalité précédente est, a priori, vraie sur* $]-1,1[$*, mais puisque* f *et* $x \mapsto (1+x)\ln(1+x) - x$ *sont continues en 1, elle est aussi vraie en* 1*. On en déduit*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = 2\ln(2) - 1.$$