Chapitre XI Espaces vectoriels normés

Table des matières

XI.1 Normes et distances

Définition 1

Soit E un ($\mathbb{R}-$ ou $\mathbb{C}-$)espace vectoriel. Une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est appelée une **norme** si, pour tous vecteurs $x \in E$, $y \in E$ et scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$(i)\ N(x) = 0_{\mathbb{R}} \implies x = 0_E \qquad (ii)\ N(\alpha x) = |\alpha| N(x) \qquad (iii)\ N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un **espace vectoriel normé** *(evn)*.

Exercice 2 —

1. *La valeur absolue est une norme sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}$: y en a-t-il d'autres ? Le module est une norme sur le $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$: y en a-t-il d'autres ?*
2. *Par définition, toute norme N vérifie la propriété (iii), appelée* ***l'inégalité triangulaire****. En déduire que :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leq N(x - y).$$

Sur un même espace vectoriel, on peut définir plusieurs normes.

Exemple 3 —

1. *Voici trois normes classiques sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) des vecteurs $x = (x_1, \cdots, x_n)$:*

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n| & \|x\|_2 &= \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} & \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, \cdots, |x_n|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| & &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} & &= \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| \end{aligned}$$

2. *Voici trois normes classiques sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ des fonctions f continues d'un segment $[a, b]$ vers $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, dt \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt} \qquad \|f\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

3. *Plus généralement, si f est une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors*

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|\,dt \quad , \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2\,dt} \quad ou \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|$$

définit une norme sur l'ev $L_1(I)\cap\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues et intégrables sur I, l'ev $L_2(I)\cap\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues et de carré intégrable sur I ou l'ev des fonctions bornées sur I respectivement.

4. *Si $E_1,\ E_2,\cdots,\ E_n$ sont des espaces vectoriels normés, alors on peut munir l'espace vectoriel produit $E_1\times\cdots\times E_n$ de la norme définie par $\|(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n)\| =$*

$$\|\vec{v}_1\|+\cdots+\|\vec{v}_n\| \quad ou \quad \sqrt{\|\vec{v}_1\|^2+\cdots+\|\vec{v}_n\|^2} \quad ou \quad \max(\|\vec{v}_1\|,\cdots,\|\vec{v}_n\|).$$

Une norme permet de mesurer la distance entre deux vecteurs :

Définition 4
La **distance** associée à une norme N est l'application $d\ :\ E^2\to\mathbb{R}_+,\ (x,y)\mapsto d(x,y)=N(y-x)$.

De la définition 1, il résulte que :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ d(x,y)=0 \iff x=y \qquad \text{et} \qquad \forall (x,y,z)\in E^3,\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z).$$

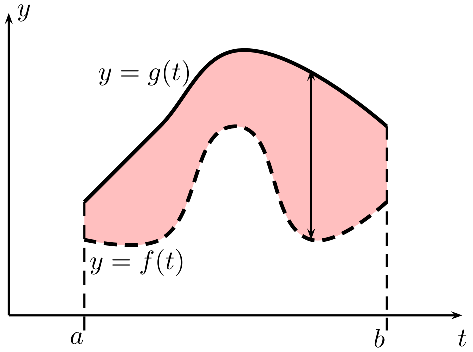

Figure XI.1 – Deux distances entre deux fonctions

Remarque 5 — *Si une norme provient d'un produit scalaire, alors on dit que cette norme est* ***euclidienne****. Ce produit scalaire est alors unique (car on peut le calculer grâce aux égalités de polarisation) et cette norme vérifie l'égalité du parallélogramme (remarque 9 du chapitre VIII).*

Mais certaines normes ne proviennent pas d'un produit scalaire, par exemple la norme « infini » $\|(x,y)\|_\infty=\max\big(|x|,|y|\big)$ sur l'ev $\mathbb{R}^2$.

Preuve — *Si $u=(2,1)$ et $v=(1,2)$, alors* $\|u+v\|_\infty=3 \quad \|u-v\|_\infty=1 \quad \|u\|_\infty=2 \quad \|v\|_\infty=2,$

d'où $\|u+v\|_\infty^2+\|u-v\|_\infty^2\neq 2\|u\|_\infty^2+2\|v\|_\infty^2$. *Donc l'égalité du parallélogramme n'est pas vérifiée.* □

XI.2 Boules

Définition 6
Soient un espace vectoriel E, une norme N, un vecteur $a\in E$ et un réel $r>0$. On appelle :

1. **sphère** de centre a et de rayon r la partie de E définie par $\{x\in E \mid\ N(x-a)=r\}$;
2. **boule ouverte** de centre a et de rayon r la partie de E définie par $\{x\in E \mid\ N(x-a)<r\}$;
3. **boule fermée** de centre a et de rayon r la partie de E définie par $\{x\in E \mid\ N(x-a)\leq r\}$.

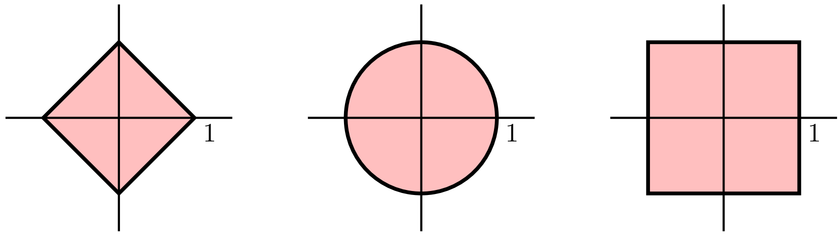

FIGURE XI.2 – Les boules (de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et de rayon 1) associées aux trois normes classiques (1, 2 et ∞) de $\mathbb{R}^2$

La boule ouverte de centre a et de rayon r est notée $B(a,r)$ tandis que la boule fermée est notée $\bar{B}(a,r)$. La sphère est $\bar{B}(a,r) \setminus B(a,r)$.

EXERCICE 7 — *Montrer que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2 \leq n \cdot \|x\|_\infty.$$

DÉFINITION 8
Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. On dit que :

(i) une partie $A \subset E$ est **bornée** si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ \|x\| \leq M$;

(ii) une suite $u : \mathbb{N} \to E,\ n \mapsto u_n$ de vecteurs est bornée si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq M$;

(iii) une fonction $f : D \to E,\ x \mapsto f(x)$ est bornée si $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in D,\ \|f(t)\| \leq M$.

Autrement dit : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$(i)\ A \subset B(0_E, M) \qquad (ii)\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in B(0_E, M) \qquad (iii)\ f(D) \subset B(0_E, M).$$

XI.3 Limite d'une suite

Dans $\mathbb{R}$, pour dire qu'un nombre x tend vers un nombre a, on utilise la valeur absolue :

$$x \to a \iff x - a \to 0 \iff |x-a| \to 0.$$

Dans un espace vectoriel E, pour dire qu'un vecteur x tend vers un vecteur a, on utilisera une norme :

$$x \to a \iff x - a \to 0_E \iff N(x-a) \to 0_{\mathbb{R}} \iff d(x,a) \to 0_{\mathbb{R}}.$$

DÉFINITION 9
Soient E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. Soit une suite (u_n) d'élements de E. Soit un vecteur $\ell \in E$. On dit que u_n tend vers ℓ si $\|u_n - \ell\|$ tend vers $0_{\mathbb{R}}$.

Autrement dit : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon)$.

PROPOSITION 10
Soit une suite (u_n) d'élements d'un *evn* E.

1. **(unicité de la limite)** Il n'existe pas toujours de limite ℓ, mais, quand elle existe, elle est unique. On peut donc parler de la limite de u_n et écrire $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$.
2. **(cv $\Longrightarrow$ bornée)** Si la suite des vecteurs u_n converge, alors elle est bornée. (La réciproque est fausse.)

Preuve —

1. Par l'absurde : si (u_n) converge vers deux limites ℓ_1 et ℓ_2 distinctes, alors : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1,\ \|u_n - \ell_1\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists N_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_2,\ \|u_n - \ell_2\| \leq \varepsilon.$$

   Si on choisit d'une part $\varepsilon = \frac{1}{3}\|\ell_2 - \ell_1\|$ (qui est bien strictement positif car $\ell_1 \neq \ell_2$) et d'autre part $n \geq \max(N_1, N_2)$, alors : $0 < \|\ell_2 - \ell_1\| \leq \|\ell_2 - u_n\| + \|u_n - \ell_1\| \leq \frac{2}{3}\|\ell_2 - \ell_1\|$. C'est absurde.

2. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$, alors $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|u_n - \ell\| \leq \sqrt{7}$. (on a choisi $\varepsilon = \sqrt{7}$), d'où : à partir du rang N, $\|u_n - \ell\| \leq \sqrt{7}$, d'où $\|u_n\| \leq \|u_n - \ell\| + \|\ell\| \leq \sqrt{7} + \|\ell\|$; avant le rang N, $\|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, \cdots, \|u_{N-1}\|)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq \sqrt{7} + \|\ell\| + \max(\|u_0\|, \cdots, \|u_{N-1}\|)$.

□

Exercice 11 — *La suite des fonctions $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ représentées sur la figure XI.3 est-elle bornée ? convergente ? (Utiliser la norme ∞ puis la norme 1 pour répondre.)*

Remarque 12 (**la norme « infini » est la norme de la convergence uniforme**) — *Si I est une partie de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble E des fonctions bornées de I vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un* ev, *qu'on peut munir d'une norme :*

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|.$$

Dans cet evn *E,*

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \iff \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \sup_{t\in I} |f_n(t) - f(t)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\iff \textit{la suite des fonctions } f_n \textit{ converge uniformément sur } I \textit{ vers la fonction } f.$$

> Définition 13
> Soit (u_n) une suite de vecteurs de E. On dit qu'une suite (v_n) est **extraite** de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

À noter que, par récurrence, la stricte croissance de φ implique que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.

> Proposition 14
> Si une suite converge, alors toute suite extraite converge vers la même limite.

Preuve — Soit $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Si $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (n \geq N \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon)$.
Or $\varphi(n) \geq n$, d'où $n \geq N \implies \varphi(n) \geq N \implies \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon$. □

XI.4 Comparer des normes

> Définition 15
> Soient N et $\|\cdot\|$ deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que ces normes sont **équivalentes** s'il existe deux réels α et β tels que
> $$\forall x \in E, \qquad N(x) \leq \alpha \cdot \|x\| \qquad \text{et} \qquad \|x\| \leq \beta \cdot N(x).$$

Remarque 16 —
1. *Cette relation entre deux normes est une relation d'équivalence (car elle est réflexive, symétrique et transitive).*
2. *Si deux normes sont équivalentes, alors ce qui converge pour l'une converge aussi pour l'autre : $N(x-a) \to 0 \iff \|x-a\| \to 0$. Et la limite ne dépend pas non plus de la norme.*

   Preuve — *Si $\|x-a\|$ tend vers 0, alors $N(x-a)$ aussi car $N(x-a) \leq \alpha \cdot \|x-a\|$.*
   De même pour la réciproque. □
3. *De même, être ou ne pas être borné est indépendant du choix de la norme, si les normes sont équivalentes.*

4. Les trois normes classiques sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes car

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

d'après l'exercice 7.

Théorème 17
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Preuve — Voir l'annexe ??. □

Donc, en dimension finie, ni la convergence ni la limite, ni le caractère borné ne dépend de la norme. Ce n'est plus vrai en dimension infinie ! C'est ce que montre l'exercice suivant.

Exercice 18 — *1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ continues. Déterminer un réel α tel que : $\forall f \in E, \quad \|f\|_1 \leq \alpha \cdot \|f\|_\infty$.*

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n et g_n définies sur $[0,1]$ et représentées ci-dessous :

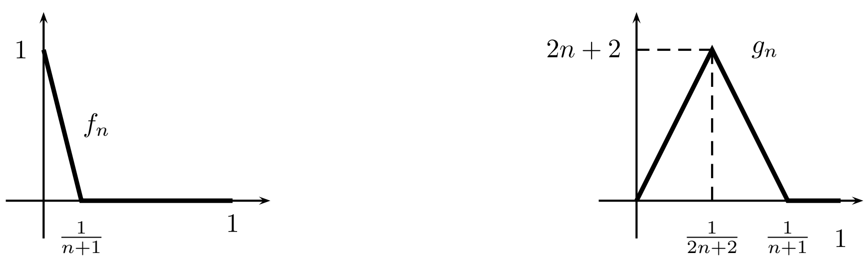

Figure XI.3 – Deux suites de fonctions

Étudier $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$ ainsi que $\|g_n\|_1$ et $\|g_n\|_\infty$. Conclure.

Corollaire 19 (coordonnée par coordonnée)
Soient un *evn* E de dimension finie, un vecteur $\ell \in E$ et une suite (u_n) de vecteurs de E :

u_n tend vers ℓ si, et seulement si, chaque coordonnée de u_n tend vers chaque coordonnée de ℓ.

Preuve — Soit d la dimension de l'*ev* E. On se place dans une base $(e_1, \cdots e_d)$ de E. L'application

$$N : E \to \mathbb{R}_+, \ x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d \mapsto \max_{i \in [\![1,d]\!]}(|x_i|)$$

est une norme sur E. On choisit de travailler avec cette norme. D'après le théorème 17, $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \iff N(u_n - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Or $N(u_n - \ell) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \max_{i\in[\![1,d]\!]}(|(u_n)_i - \ell_i|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \forall i \in [\![1,d]\!], \ |(u_n)_i - \ell_i| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \forall i \in [\![1,d]\!], \ (u_n)_i \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell_i$. □

Exercice 20 — *Soient un réel a et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice*

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Montrer que la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice

$$L = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

XI.5 Adhérence

Définition 21
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

On dit qu'un vecteur $\ell \in E$ est **adhérent à** A si toute boule centrée en ℓ rencontre A :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(\ell, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

L'**adhérence de** A, notée $\bar{A}$, est l'ensemble des vecteurs adhérents à A.

Tous les points de A sont adhérents à A : on a toujours $A \subset \bar{A}$. Mais pas toujours $\bar{A} \subset A$, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 22 — — *Soient les trois intervalles* $I = [0,1]$, $J =]0,1]$ *et* $K =]0, +\infty[$ *de* $\mathbb{R}$ *:*

$$\bar{I} = I \quad , \quad \bar{J} = I \quad , \quad et \quad \bar{K} = [0, +\infty[.$$

— *L'adhérence* $\overline{B(a,r)}$ *d'une boule ouverte* $B(a,r)$ *est la boule fermée de même centre* a *et de même rayon* r*.*

Proposition 23 (caractérisation séquentielle de l'adhérence)
Un vecteur $\ell \in E$ est adhérent à $A \subset E$ si, et seulement si, ℓ est la limite d'une suite (u_n) d'éléments de A.

Preuve — Supposons que ℓ est adhérent à A. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B(\ell, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Soit u_n un vecteur de $B(\ell, \frac{1}{n}) \cap A$. Chaque u_n appartient à A et la suite (u_n) tend vers ℓ. Réciproquement, supposons que $u_n \in A$ et u_n tend vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n tel que $\|u_n - \ell\| < \varepsilon$. D'où $u_n \in B(\ell, \varepsilon)$. De plus $u_n \in A$. D'où $u_n \in B(\ell, \varepsilon) \cap A$. D'où $B(\ell, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Donc ℓ est adhérent à A. □

Définition 24
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que A est **dense** dans E si $\bar{A} = E$ Autrement dit : tout vecteur de E est adhérent à A. Ou encore : tout vecteur de E est la limite d'une suite de vecteurs de A.

Exemple 25 — 1. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ aussi est dense dans $\mathbb{R}$.*

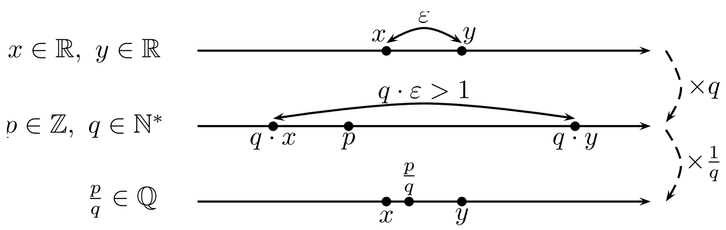

Figure XI.4 – Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

2. *D'après le théorème V.23 d'approximation de Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans l'ev $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur un segment $[a,b]$ muni de la norme « infini ».*

Exercice 26 — *Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.*

XI.6 Limite d'une fonction

Définition 27
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une fonction $f : D \to F,\ x \mapsto f(x)$ définie sur une partie $D \subset E$. Soient a un point adhérent à D et $\ell \in F$. On dit que $f(x)$ **tend vers** ℓ **quand** x **tend vers** a, et on note $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si

$$\|f(x) - \ell\| \underset{\|x-a\|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x \in D, \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Remarque 28 — *1.* (abus de notation) *Dans cette définition, il y a deux normes : $\|x-a\|$ est une norme sur E et $\|f(x)-\ell\|$ est une norme sur F.*

2. (unicité de la limite) *Il n'existe pas toujours de limite ℓ, mais, quand elle existe, elle est unique. On peut donc parler de* la *limite de f en a et écrire $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$.*

Proposition 29 (**caractérisation séquentielle de la limite**)
$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si, et seulement si, à chaque fois qu'une suite (u_n) tend vers a, la suite $f(u_n)$ tend vers ℓ.

Preuve — Supposons que $f(x) \to \ell$ quand $x \to a$. Alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, \quad \|x-a\| < \delta \implies \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Soit une suite (u_n) qui tend vers a. Alors $\exists N,\ \forall n > N, \quad \|u_n - a\| < \delta$. D'où $\forall n > N, \quad \|f(u_n) - \ell\| < \varepsilon$. Donc $f(u_n)$ tend vers ℓ. Réciproquement, supposons que $f(x)$ ne tend pas vers ℓ quand x tend vers a. Alors $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x, \quad \|x-a\| < \delta$ et $\|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$. D'où, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un x tel que $\|x - a\| < \frac{1}{n}$ et $\|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$. Appelons u_n cet x. Alors u_n tend vers a et $f(u_n)$ ne tend pas vers ℓ. □

Exercice 30 — *Les fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vers $\mathbb{R}$ par*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}$$

possèdent-elles une limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$?

XI.7 Continuité d'une fonction

Définition 31
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une fonction $f : D \to F,\ x \mapsto f(x)$ définie sur une partie $D \subset E$.

1. Soit $a \in D$. On dit que f est continue en a si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
2. Soit $A \subset D$. On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

Exercice 32 — *Soient f et g deux applications continues sur un espace vectoriel normé E. Soit une partie A dense dans E. Montrer que :*

si $\forall x \in A, \quad f(x) = g(x)$, alors $\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$.

Autrement dit : *deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.*

Définition 33
Soit A une partie d'un *evn* E. On dit qu'une fonction f est :

— **uniformément continue** sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (a,x) \in A^2, \quad \|x-a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon\ ;$$

— **lipschitzienne** sur A si

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall (a,x) \in A^2,\ \|f(x) - f(a)\| \leq K \cdot \|x - a\|.$$

EXERCICE 34 — *On a déjà montré à l'exercice 20 du chapitre V que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne sur $[0,1]$.

PROPOSITION 35
lipschitzienne $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ **uniformément continue** $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ **continue**

Preuve — Supposons que f est lispchitzienne sur A : il existe alors $K > 0$ tel que

$$\forall (a,x) \in A^2, \quad \|f(x) - f(a)\| \leq K \cdot \|x - a\|. \quad \text{D'où}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall (a,x) \in A^2, \quad \|x - a\| \leq \frac{\varepsilon}{K} \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

D'où f est uniformément continue sur A.

Supposons que f est uniformément continue sur A, alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (a,x) \in A^2, \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon. \quad \text{D'où}$$

$$\forall a \in A,\ \underbrace{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon}_{f \text{ est continue en } a}.$$

D'où f est continue en tout point $a \in A$, donc sur A.

Les réciproques sont fausses d'après l'exercice précédent. □

COROLLAIRE 36
Toute norme est $1-$lipschitzienne, donc uniformément continue, donc continue.

Preuve — D'après l'exercice 2, toute norme N sur un *ev* E vérifie la propriété

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

et est donc une application $1-$lipschitzienne de l'*evn* E vers $\mathbb{R}$. □

XI.8 Linéarité & continuité

THÉORÈME 37
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application linéaire de E vers F. Il y a équivalence entre :

1. f est continue sur E ;
2. f est continue en 0_E ;
3. f est bornée sur la boule unité de E ;
4. il existe un réel K tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq K\|x\|$;
5. f est lipschitzienne sur E ;
6. f est uniformément continue sur E.

Preuve — Nous savons déjà que 1. $\implies$ 2. et 5. $\implies$ 6. et 6. $\implies$ 1.

2. $\implies$ 3. car f est linéaire, d'où $f(0_E) = 0_F$ et la continuité en 0_E implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \|x - 0\| \leq \delta \implies \|f(x) - f(0)\| = \|f(x)\| \leq 1.$$

Et, par linéarité de f : $\forall x \in E, \quad \|x\| \leq 1 \implies \|f(x)\| \leq \frac{1}{\delta}$. Donc f est bornée sur la boule unité.

3. $\implies$ 4. car, pour tout $x \neq 0_E$, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, d'où $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall x \neq 0_E$, $\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq K$, donc $\exists K \in \mathbb{R}$, $\forall x \neq 0_E$, $\|f(x)\| \leq K\|x\|$. Et cette inégalité reste vraie si $x = 0_E$.

4. $\implies$ 5. car, par linéarité de f : $\forall (x,a) \in E^2$, $\|f(x) - f(a)\| = \|f(x-a)\| \leq K\|x-a\|$. □

Exercice 38 — *Soit l'application linéaire $d : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P'$. On munit l'ev $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de la norme $N : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}$, $P = \sum_{i=0}^{\deg P} a_i X^i \mapsto \max_{0 \leq i \leq \deg P}(|a_i|)$. Montrer que d n'est pas continue.*

Cet exercice montre que, sur un *evn* de dimension infinie, une application peut être linéaire sans être continue. Le théorème suivant montre que cela n'arrivera jamais sur un *evn* de dimension finie.

> Théorème 39
> Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si $f : E \to F$ est linéaire et si E de dimension finie, alors f est lipschitzienne, donc continue sur E.

Preuve — Notons N la norme sur l'espace vectoriel E et $\|\cdot\|$ la norme sur l'espace vectoriel F. L'espace vectoriel E est de dimension finie, d'où :

— on peut choisir une base $(e_1, \cdots, e_d)$ de E et donc écrire chaque vecteur $x \in E$ sous la forme $x_1e_1 + \cdots + x_de_d$;

— on peut munir l'*ev* E de la norme N définie par $N(x) = \max(|x_1|, \cdots, |x_d|)$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x_1 f(e_1) + \cdots + x_d f(e_d), \text{ d'où} \\ \|f(x)\| & \leq & |x_1|\|f(e_1)\| + \cdots + |x_d|\|f(e_d)\| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ & \leq & K \cdot N(x) \quad \text{avec } K = d \times \max\left(\|f(e_1)\|, \cdots, \|f(e_d)\|\right). \end{array}$$

— On en déduit, grâce au théorème 37, la continuité de f, pour ce choix de la norme N sur E, ou pour tout autre choix, car E est de dimension finie et les normes sont équivalentes en dimension finie.

□

Exemple 40 — *L'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, donc les applications suivantes sont continues car linéaires :*

— *la trace* $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \mathrm{tr}\, A$ *;*

— *la transposée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \mapsto A^T$;*

— *un changement de base $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \mapsto P^{-1}AP$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$.*

Les mêmes raisonnements valent pour les applications multilinéaires, ce que nous admettons :

> Proposition 41
> Soient E_1, $E_2, \cdots$, E_n et F des espaces vectoriels normés. On munit l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme définie par $\|(v_1, \cdots, v_n)\| = \max(\|v_1\|, \cdots, \|v_n\|)$. Soit $f : \prod_{i=1}^n E_i \to F$ une application multilinéaire : f est continue *ssi* il existe un réel K tel que
>
> $$\forall (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \prod_{i=1}^n E_i, \quad \|f(v_1, v_2, \cdots, v_n)\| \leq K\|v_1\|\|v_2\| \cdots \|v_n\|.$$
>
> Et c'est le cas si les *ev* E_1, $E_2, \cdots$, E_n sont de dimensions finies.

Exemple 42 —

1. *Si on munit un $\mathbb{R}-$ev E (de dimension finie ou infinie) d'un produit scalaire, alors ce produit scalaire est continu de E^2 vers $\mathbb{R}$ car il est bilinéaire et $\forall (u,v) \in E^2$, $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
2. *La multiplication de deux matrices*

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \ (A, B) \mapsto A \cdot B$$

est bilinéaire, donc continue car les ev $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ sont de dimensions finies.

3. *Si $\mathcal{B}$ est une base d'un $\mathbb{K}-$ev E de dimension n, alors le déterminant*

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K},\ (v_1, v_2, \cdots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

est continu car il est multilinéaire et l'ev E est de dimension finie.

XI.9 Norme subordonnée

Remarque 43 — 1. *L'ensemble des applications linéaires d'un ev E vers un ev F est noté $\mathcal{L}(E, F)$. Cet ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un ev, c'est aussi un anneau (pour les lois $+$ et $\circ$), c'est même une algèbre (annexe A).*

2. *Si on munit chacun des ev E et F d'une norme, alors une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ peut être ou ne pas être continue (exercice 38). On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de l'evn E vers l'evn F qui sont continues. L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}_c(E, F)$.*
3. *Si l'evn E est de dimension finie, les ensembles $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}_c(E, F)$ sont égaux (théorème 39).*

Proposition-Définition 44

Soient E et F deux *evn*. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ une application linéaire continue de E vers F.

(i) On appelle **norme subordonnée** (ou norme d'opérateur) de f et on note $|||f|||$ le plus petit réel K tel que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq K \cdot \|x\|$. Il vaut

$$|||f||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|.$$

(ii) La norme subordonnée est une norme sur l'*ev* $\mathcal{L}_c(E, F)$. Et cette norme est **sous-multiplicative**, *i.e.*

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad |||f \circ g||| \leq |||f||| \cdot |||g|||.$$

Preuve —

(i) D'après le théorème 37, si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$, alors il existe un réel K tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq K\|x\|$. Par suite, pour tout $x \neq 0_E$, $\dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\|f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\|$ est majoré. Et le plus petit majorant est donc égal aux deux *sup*.

(ii) Soient $f, g \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On vérifie les troix axiomes de la définition 1 :

- Soit $x \in E$. Si $|||f||| = 0$, alors $\|f(x)\| \leq 0\|x\| = 0$. D'où $f(x) = 0$. C'est vrai pour tout $x \in E$, donc $f = 0$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{K}$: $|||\alpha f||| = \sup_{\|x\|=1} \|\alpha f(x)\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = |\alpha| |||f|||$.
- Soit $x \in E$: $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq |||f|||\|x\| + |||g|||\|x\| \leq (|||f||| + |||g|||)\|x\|$. Or $|||f + g|||$ est le plus petit réel vérifiant cette inégalité, il est donc inférieur à $|||f||| + |||g|||$.

Et cette norme est sous-multiplicative car : $\forall x \in E,\ \|f \circ g(x)\| = \|f(g(x))\| \leq |||f||| \cdot \|g(x)\| \leq |||f||| \cdot |||g|||\|x\|$.
Or $|||f \circ g|||$ est le plus petit réel vérifiant cette propriété, il est donc inférieur à $|||f||| \cdot |||g|||$.

□

Les définition, notation et propriétés sont les mêmes si on remplace une application linéaire continue f par une matrice A.

Exemple 45 — *On munit l'ev $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ de la norme définie par : $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ pour tout vecteur colonne $X = (x_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ une matrice carrée :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}),\ \|AX\|_\infty \leq K \cdot \|X\|_\infty, \quad \text{avec } K = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Preuve — $\|AX\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right|$. *Or* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,\|X\|_\infty \leq K \cdot \|X\|_\infty$ □

Ce réel K est le plus petit qui vérifie cette inégalité car $\exists X \neq 0,\ \|AX\|_\infty = K \cdot \|X\|_\infty$.

Preuve — *Il existe une ligne $k \in [\![1,n]\!]$ telle que $K = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$. Pour chaque $j \in [\![1,n]\!]$, posons $x_j = +1$ si $a_{kj} > 0$ et $x_j = -1$ si $a_{kj} \leq 0$. Pour ce vecteur X, d'une part $\|AX\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = K$ et d'autre part $\|X\|_\infty = 1$. Donc $\|AX\|_\infty = K \cdot \|X\|_\infty$.* □

On en déduit que $\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$

Exercice 46 — *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'ev $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ d'une norme sous-multiplicative. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour toutes matrices M et H de E,*

$$\|(M+H)^k - M^k\| \leq (\|M\| + \|H\|)^k - \|M\|^k.$$

Qu'en déduire ?

XI.10 Ouverts et fermés

Définition 47
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. On dit que :

1. un point $a \in E$ est **intérieur à** A si $\exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset A$.
2. A est **un ouvert** ou une partie ouverte de E si $\forall a \in A,\ \exists \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \subset A$;
3. A est **un fermé** ou une partie fermée de E si son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert de E.

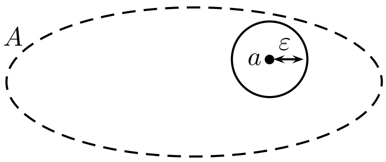

Figure XI.5 – A est un ouvert de E $\iff$ tout point a de A est intérieur à A.

Remarque 48 —
1. *L'intersection d'une famille d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.*
   Voici un contre-exemple : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[= \{0\}$.
2. *L'union d'une famille de fermés n'est pas toujours un fermé.*
   Voici un contre-exemple : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] =]-1,+1[$.
3. *La réunion d'une famille d'ouverts est toujours un ouvert. L'intersection d'une famille de fermés est toujours un fermé.*
   Preuve — *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. On veut montrer que l'union $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert. Soit $x \in A$. Alors x appartient à au moins un A_i. Or cet A_i est un ouvert. D'où il existe une boule $B(x,\varepsilon) \subset A_i$. D'où $B(x,\varepsilon) \subset A$. Donc A est un ouvert. Pour l'intersection des fermés, on passe au complémentaire...* □
4. *L'intersection d'une famille finie d'ouverts est un ouvert. L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.*
   Preuve — *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille* finie *d'ouverts A_i. On veut montrer que l'intersection $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ est un ouvert. Soit $x \in A$. Alors x appartient à chaque A_i. Or chaque A_i est un ouvert, d'où il existe une boule $B(x,\varepsilon_i) \subset A_i$. Soit $\varepsilon = \min_{i \in I} \varepsilon_i$. Alors $\varepsilon > 0$ car I est fini. Et $B(x,\varepsilon)$ est incluse dans chaque A_i, d'où $B(x,\varepsilon) \subset A$. Donc A est un ouvert. Pour l'union finie des fermés, on passe au complémentaire...* □

Exercice 49 — *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que :*

1. *les intervalles $]-\infty, b[$, $]a, b[$ et $]a, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$;*
2. *les intervalles $]-\infty, b]$, $[a, b]$ et $[a, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$;*
3. *l'intervalle $[a, b[$ n'est ni ouvert ni fermé.*

Proposition 50

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit une application $f : E \to F,\ x \mapsto f(x)$ continue.

Si B est un ouvert (respectivement un fermé) de F, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert (respectivement un fermé) de E.

Autrement dit : l'image réciproque d'un ouvert (respectivement d'un fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé).

Preuve — Sot $a \in f^{-1}(B)$. Alors $f(a) \in B$.

Or B est un ouvert de F, d'où $\exists \varepsilon > 0, \quad B(f(a), \varepsilon) \subset B$.

Or f est continue, d'où $\exists \delta > 0, \quad \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

D'où $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B)$. Donc $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E.

De même pour un fermé en utilisant $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$: l'image réciproque du complémentaire est égale au complémentaire de l'image réciproque. □

Exercice 51 — *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue d'un* evn *E vers $\mathbb{R}$. Montrer que :*

1. *l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$ est un ouvert de E ;*
2. *l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est un fermé de E ;*
3. *l'ensemble $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est un fermé de E.*

Exemple 52 — *Soit E un evn. Toute boule ouverte est un ouvert, toute boule fermée est un fermé et toute sphère est un fermé.*

Preuve — *La boule $B(a, R)$ centrée en $a \in E$ et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des solutions de l'inéquation $\|x - a\| < R$qui équivaut à $R - \|x - a\| > 0$. Or la fonction $f : E \to \mathbb{R},\ x \mapsto R - \|x - a\|$ est continue, donc $B(a, R) = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E.*

De même, $\bar{B}(a, R) = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E.

De même, $\bar{B}(a, R) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ est un fermé de E. □

Exercice 53 — *Soit E un* evn *de dimension finie. Montrer que tout hyperplan de E est un fermé.*

Proposition 54

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

1. Son adhérence $\bar{A}$ est un fermé de E.
2. A est un fermé de E *ssi* $A = \bar{A}$.
3. (caractérisation séquentielle d'un fermé) A est un fermé de E si, et seulement si, à chaque fois qu'une suite (u_n) d'éléments de A converge, la limite de (u_n) appartient à A.

Preuve —

1. On veut montrer que $E \setminus \bar{A}$ est un ouvert de E. Soit $x \in E \setminus \bar{A}$. Alors il existe une boule $B(x, \epsilon)$ telle que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$. Chaque vecteur de cette boule $B(x, \varepsilon)$ appartient aussi à $E \setminus \bar{A}$. D'où $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus \bar{A}$. Donc $E \setminus \bar{A}$ est un ouvert de E.
2. Si $A = \bar{A}$, alors A est un fermé car $\bar{A}$ est un fermé. Réciproquement : supposons que A est un fermé (alors $E \setminus A$ est un ouvert). On veut montrer que $\bar{A} \subset A$.
   Soit $x \in \bar{A}$. Alors $\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. D'où $x \notin E \setminus A$. (Par l'absurde : si $x \in E \setminus A$ alors il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset E \setminus A$ car $E \setminus A$ est un ouvert.) D'où $x \in A$. Donc $\bar{A} \subset A$.
3. Utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence (proposition 23).

□