Corrigé du Kdo du 10/01/2025

Séries entières

On se propose de démontrer un théorème de Bernstein :

si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(2n)}(x) \geq 0,$$

alors f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Hypothèses et notations :

— la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ à valeurs réelles et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad f^{(2n)}(x) \geq 0$$

— les fonctions g et h sont définies par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

1) Soient deux réels a et b tels que $a<b$, n un entier naturel et ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\phi(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \phi^{(n+1)}(a+u(b-a))\, du$$

2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ et $h^{(n+1)}$ ont la même parité que n et calculer $g^{(2n+1)}(0)$ et $h^{(2n)}(0)$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(2n)} \geq 0$ sur $[0,1[$ et en déduire qu'il en va de même pour $g^{(n)}$.

4) On fixe n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction

$$\varphi_n : x \mapsto \frac{1}{x^{2n+1}} \left(g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \right)$$

est croissante et positive sur $]0,1[$.

b) Pour $0 \leq x < a < 1$, en déduire la double inégalité :

$$0 \leq g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} g(a)$$

c) En déduire que, sur $]-1,1[$, g est la somme de sa série de Taylor en 0, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

5) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$.

a) Montrer que $|h^{(2n)}(x)| \leq g^{(2n)}(x)$.

b) En déduire que :

$$\left| h(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}$$

c) Démontrer le théorème de Bernstein.

6) Application :

a) Soit f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1[, \quad f^{(n)}(x) \geq 0$$

b) En déduire que la fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

---

1) ϕ étant de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, on peut appliquer la formule de Taylor-Laplace (ou Taylor avec reste intégral) :

$$\phi(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \phi^{(n+1)}(t)\, dt$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue le changement de variable défini par $t = a + (b-a)u$. La fonction $u \mapsto a + (b-a)u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec $dt = (b-a)\, du$ et on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \phi^{(n+1)}(t)\, dt &= \int_0^1 \frac{[(b-a)(1-u)]^n}{n!} \phi^{(n+1)}(a+(b-a)u)(b-a)\, du \\
&= \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \phi^{(n+1)}(a+(b-a)u)\, du
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\phi(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \phi^{(n+1)}(a+u(b-a))\, du}$.

2) Les fonctions g et h sont respectivement paire et impaire, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad g^{(n)}(x) = \frac{f^{(n)}(x) + (-1)^n f^{(n)}(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h^{(n+1)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x) - (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(-x)}{2}$$

Ainsi, $\boxed{g^{(n)} \text{ et } h^{(n+1)} \text{ ont la même parité que } n \text{ et donc } g^{(2n+1)}(0) = h^{(2n)}(0) = 0}$ car ces dernières fonctions sont impaires.

3) Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$, $g^{(2n)}(x) = \frac{f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)}{2}$ et que $f^{(2n)} \geq 0$, on a $\boxed{g^{(2n)} \geq 0 \text{ sur } [0,1[}$.

Si n est impair, alors $n+1$ est pair et on a $(g^{(n)})' = g^{(n+1)} \geq 0$ sur $[0,1[$. Donc $g^{(n)}$ croît avec $g^{(n)}(0) = 0$ d'après la question précédente.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ g^{(n)} \geq 0 \text{ sur } [0,1[}$.

4) On fixe n dans $\mathbb{N}$.

a) Soit $x \in]0,1[$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^{2n+1}$ sur $[0,x]$. En appliquant le résultat de la question 1 et en utilisant la question 2 (pour tout entier k, $g^{(2k+1)}(0) = 0$), on obtient :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 (1-u)^{2n} g^{(2n+1)}(ux)\, du$$

Selon la question précédente et par positivité de l'intégrale, on a $\varphi_n(x) \geq 0$ et donc $\boxed{\varphi_n \text{ est positive sur }]0,1[}$.

Comme la fonction $g^{(2n+1)}$ croît sur $]0,1[$, pour tout $u \in [0,1]$, la fonction $x \mapsto (1-u)^{2n} g^{(2n+1)}(ux)$ est croissante sur $]0,1[$. Par croissance de l'intégrale, $\boxed{\text{la fonction } \varphi_n \text{ est croissante sur }]0,1[}$.

b) Le cas $x = 0$ est clair. Supposons alors $0 < x < a < 1$. Comme φ_n croît sur $]0,1[$, on a $\varphi_n(x) \leq \varphi_n(a)$, d'où :

$$g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \left(g(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} a^{2k} \right)$$

Comme les $g^{(2k)}(0)a^{2k}$ sont positifs, on obtient $\boxed{0 \leq g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} g(a)}$.

c) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $g(x) = g(|x|)$. Choisissons $a \in]|x|,1[$. Alors $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'encadrement précédent et le théorème des gendarmes donnent alors $g(|x|) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} |x|^{2k}$.

Comme g est paire et que $g^{(2k+1)}(0) = 0$, on conclut que, $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k}$.

5) On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$.

a) Comme $f^{(2n)}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on a :

$$|h^{(2n)}(x)| = \left| \frac{f^{(2n)}(x) - f^{(2n)}(-x)}{2} \right| \leq \frac{f^{(2n)}(x) + f^{(2n)}(-x)}{2} = g^{(2n)}(x)$$

Ainsi, $\boxed{|h^{(2n)}(x)| \leq g^{(2n)}(x)}$.

b) On applique à nouveau la question 1 à la fonction h qui est de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$ sur le segment d'extrémités 0 et x. Comme $h^{(2k)}(0) = 0$, pour tout entier naturel k, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| h(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| &= \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \left| \int_0^1 (1-u)^{2n+1} h^{(2n+2)}(ux)\,du \right| \\
&\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} |h^{(2n+2)}(ux)|\,du \\
&\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} g^{(2n+2)}(ux)\,du \\
&\leq g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{d'après la question 1}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\left| h(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \leq g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}}$.

c) Si $x \in]-1,1[,\ g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k$, d'après 4)c). D'où, selon la question précédente et en utilisant le théorème des gendarmes :

$$\left| h(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et donc} \qquad h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Comme $f = g + h$, on obtient que $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \text{ pour tout } x \in]-1,1[}$

6) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et impaire sur $]-1,1[$.

a) Procédons par récurrence forte sur n :

— $f \geq 0$ sur $[0,1[$.

— Si, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)} \geq 0$ sur $[0,1[$, alors, selon la formule de Leibniz :

$$f^{(n+1)} = (f')^{(n)} = \frac{\pi}{2}(1+f^2)^{(n)} = \frac{\pi}{2}\left((x \mapsto 1)^{(n)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}\right) \geq 0 \quad \text{sur } [0,1[$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \geq 0 \text{ sur } [0,1[}$.

b) De la question précédente, on tire que la fonction f' vérifie $(f')^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1[$ et à chaque ordre $n \in \mathbb{N}$. Or, f étant impaire, la fonction f' est paire et il en est de méme de toutes ses dérivées $(f')^{(2n)}$ d'ordre pair. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-1,+1[, \quad (f')^{(2n)}(x) \geq 0.$$

On en déduit, grâce au théorème de Bernstein, que f' est développable en série entière sur $]-1,1[$. Il en est de même pour f car on peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. Il existe donc une suite de coefficients réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-1,+1[, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ce qui se réécrit, grâce au changement de variable $y = \frac{\pi}{2}x$:

$$\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \frac{2^n}{\pi^n}\right) y^n.$$

$\boxed{\text{La fonction tan est donc développable en série entière sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.