Exercice 1 - Développement en série entière (⋆⋆)

On considère :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \end{array}$$

Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

Les fonctions $x \mapsto e^{x^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont développables en série entières avec un rayon de convergence infini. En primitivant, on en déduit que $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est également développable en série entière de rayon de convergence infini, et enfin par produit on en déduit que f est développable en série entière de rayon de convergence infini.

Dès lors on considère l'unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$$

On vérifie facilement que f est solution de l'équation différentielle $f' = 2xf + 1$ on obtient donc l'égalité :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\, a_{n+1} x^n - 2 \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left((n+1)\, a_{n+1} - 2a_{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

En identifiant les coefficient qui sont uniques on trouve la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)\, a_{n+1} = 2a_{n-1}$, mais on remarque que l'on a d'une part $a_0 = 0$ et d'autre part $a_1 = 1$ ainsi on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = 0 \qquad a_{2n+1} = \frac{2^n}{(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times 1} = \frac{4^n n!}{(2n+1)!}$$

Exercice 2 - Un calcul de série entière (⋆⋆)

On considère la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,(n-1)} x^n$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

Avec la règle de D'alembert on trouve que $R = 1$ et de plus puisque :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n\,(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

On en déduit que la série converge normalement sur $[-1, 1]$.

2. Démontrer que f est continue sur son domaine de définition.

Les théorèmes de converge n'assure la continuité que sur l'ouvert $]-1, 1[$. Pour obtenir la continuité aux bornes on va montrer la convergence normale de la série, or pour $x \in [-1, 1]$ on a :

$$\left|\frac{(-1)^n x^n}{n\,(n-1)}\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

Et cette dernière série converge normalement donc la série converge normalement et de plus chaque fonction

$x \mapsto \frac{(-1)^n x^n}{n(n-1)}$ est continue, ainsi on en déduit la continuité de f sur $[-1,1]$.

3. Exprimer f', puis f, à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

Comme f est développable en série entière elle est $\mathcal{C}^\infty$ en particulier on a en dérivant terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x)$$

En intégrant on trouve alors que $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x + C$, puis en évaluant f en 0 on trouve $f(0) = 0 = C$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n\,(n-1)}$.

L'égalité $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ n'est à priori vraie que pour $x \in [-1,1]$, mais grâce à la continuité de f en 1 (cf question 2) on peut l'appliquer pour $x = 1$ et on trouve :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n\,(n-1)} = f(1) = 2\ln(2) - 1$$

Exercice 3 - Étude (⋆⋆⋆)

Soit $a_0 > 0$, on considère la suite définie par $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite (a_n).

Par récurrence immédiate a_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ de plus on a par une inégalité classique $a_{n+1} = \ln(1+a_n) \leq a_n$ et (a_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0 on en déduit que (a_n) est convergente, soit $l \in \mathbb{R}$ sa limite. Par passage à la limite dans $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$, par continuité de $x \mapsto \ln(1+x)$ on trouve :

$$l = \ln(1+l)$$

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2. En considérant $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$ trouver un équivalent simple de a_n.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} &= \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}a_n} \\
&= \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{\ln(1+a_n)\,a_n} \\
&= \frac{a_n - \left(a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o\left(a_n^2\right)\right)}{(a_n + o(a_n))\,a_n} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{a_n^2 + o\left(a_n^2\right)}{a_n^2 + o(a_n^2)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$. Comme la série de terme constant $\frac{1}{2}$ est divergente et à terme positifs ou nuls, d'après le théorème de sommation des équivalents on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}$$

Après simplification on trouve alors :

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$$

Et de cela on en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

3. En déduire le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. Étudier le comportement au bord.

Comme la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{2}{n} x^n$ est de rayon de convergence 1, c'est également le cas pour la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Pour $x = 1$, on sait que la série de terme générale $\frac{2}{n}$ diverge par critère de Riemann donc la série de terme général a_n diverge également.

Pour $x = -1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n (-1)^n$ est alternée, et comme (a_n) est décroissante et de limite nulle, par le théorème de Leibniz (TSA) on en déduit que la série converge.

Exercice 4 - Équation différentielle (⋆⋆)

Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy + y = 0$

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$, avec $r > 0$.

On procède par analyse/synthèse en supposant qu'il existe une solution f développable en série entière sur un intervalle non vide, on a alors $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$. En dérivant terme à terme et en incorporant dans l'équation différentielle on obtient l'égalité suivante :

$$x(x-1)f''(x) + 3xf'(x) + f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big[(n+1)^2 a_n - n(n+1) a_{n+1} \Big] x^n = 0$$

En identifiant les coefficients on obtient alors une relation sur la suite (a_n) à savoir : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$. Par produit télescopique on obtient donc $a_n = na_1$, or le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ est 1 car il est identique à celui de la série $\sum x^n$. De plus en remarquant que :

$$f(x) = a_1 x \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

On en déduit que f est de la forme $f(x) = \frac{\lambda x}{(1-x)^2}$. Réciproquement les fonctions de cette forme sont toutes solutions de l'équation différentielle.

2. Est-ce que toutes solutions de cette équation différentielle sur $]0, 1[$ est la restriction d'une fonction développable en série entière ?

Non ! Mais si vous voulez des arguments, suivez-moi...

En faite il faut remarquer que l'on a une équation d'ordre 2 et donc un espace solution de dimension 2 sous les conditions que $x \mapsto x(x-1)$, $x \mapsto 3x$ et $x \mapsto 1$ soient des fonctions continues et que la première ne s'annule pas sur $]0,1[$, ce qui est le cas. Or d'après la question précédente l'ensemble des solutions développables en série entière de cette équation différentielle forme une droite vectorielle, d'où l'existence de solution qui ne sont pas développables en série entière, ou encore qui ne sont pas la restriction d'une solution développable en série entière.

Exercice 5 - Une somme (⋆⋆)

1. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{4n}\,(2n+1)}$ est convergente. On se propose de calculer la somme de cette série.

On pose $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ on remarque alors que l'on a :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n!)^2\, 2^{4n}\,(2n+1)\,(2n+2)!}{((n+1)!)^2\, 2^{4n+4}\,(2n+3)\,(2n)!}\\ &= \frac{(2n+2)\,(2n+1)^2}{(n+1)^2\, 2^4\,(2n+3)}\\ &= \frac{(2n+1)^2}{8\,(n+1)\,(2n+3)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Comme$\frac{1}{4} < 1$ on en déduit par la règle de d'Alembert que la série de terme général u_n est convergente.

2. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.

On remarque que $\frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$, ainsi en utilisant la formule classique du développement de $(1+u)^\alpha$ on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)\,(-3)\dots(-2n-1)}{2^n n!}\,(-t)^n$$

En multipliant par $2\times 4\times\cdots\times 2n = 2^n n!$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} t^n$$

De plus cette série possède un rayon de convergence $R = 1$.

3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$ ainsi que son rayon de convergence.

D'après la question précédente et en remarquant que $x \in \,]-1,1[\,,\ t = x^2 \in [0,1[\, \subset\,]-1,1[$, il vient :

$$\forall x \in \,]-1,1[\,,\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$$

Comme arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, avec $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, et comme d'après le cours on peut intégrer/dériver termes à termes une série entière on obtient :

$$\arcsin(x) = \arcsin(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2\,(2n+1)} x^{2n+1}$$

Enfin le rayon de convergence de la somme précédente est le même que sa série dérivée, à savoir, $R = 1$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{4n}\,(2n+1)}$.

Prenons $x = \frac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$ dans le développement précédent, on trouve :

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2\,(2n+1)} \frac{1}{2^{2n+1}}$$

En remarquant finalement que $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2\, 2^{4n}\,(2n+1)} = \frac{\pi}{3}$$

Exercice 6 - Une série entière (⋆⋆⋆)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée.

1. Montrer que la série entière de terme général $\frac{a_n x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On note f sa somme.

D'après l'hypothèse il existe $M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq M$, dès lors $\left|\frac{a_n x^n}{n!}\right| \leq M \times \frac{|x|^n}{n!}$, on reconnaît le tmere général d'une série exponentielle de rayon de convergence infini.

2. Si $t > 1$ montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-tx} dx = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{t^{n+1}}$$

On pose $f_n(x) = \frac{a_n x^n}{n!} e^{-tx}$, dès lors f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On considère également :

$$I_n : t \mapsto \frac{1}{n}! \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx$$

Qui converge pour tout n car $t > 1$, de plus on a pour $A \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\frac{1}{n!} \int_0^A x^n e^{-tx} dx = \frac{1}{n!} \left[-x^n \frac{e^{-tx}}{t}\right]_0^A + \frac{1}{t} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^A x^{n-1} e^{-tx} dx$$

D'où par passage à la limite quand $A \to +\infty$ on trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1}(t) = \frac{1}{t} I_n(t)$, ceci combiné avec le fait que $I_0(t) = \frac{1}{t}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(t) = \frac{1}{t^{n+1}}$. Dès lors :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx \leq \frac{|a_n|}{t^{n+1}} \leq \frac{M}{t^{n+1}}$$

On constate alors que les f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}^+$, que la série $\sum f_n$ converge simplement (à l'aide de la question précédente) vers $x \mapsto f(x)\, e^{-tx}$. Et d'après ce que l'on vient de démontrer la série :

$$\sum \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx$$

Est convergeante, dès lors par interversion série-intégrale on en déduit que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-tx} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} f_n(x)\, dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{t^{n+1}}$$