Colle n^o 14

Séries entières

Exercice 1. 1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.

2. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum \dfrac{x^n}{n^a+(-1)^n}$ est-elle convergente ? (On discutera suivant les valeurs du paramètre a.)

Exercice 2 (produit de Cauchy & théorème radial d'Abel)**.** 1. Rappeler le théorème du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes. Et celui du produit de Cauchy de deux séries entières.

2. Quel est le terme général du produit de Cauchy des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$, pour tout $n \geqslant 1$, et $u_0 = v_0 = 0$? En déduire que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas toujours une série convergente.

3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et, pour tout entier naturel n, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
On suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer, à l'aide du théorème radial d'Abel, que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Exercice 3.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \sqrt{n}x^n$.

$$\text{Soit, pour tout } x \in]-R,+R[,\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^n.$$

2. Pour tout $x \in [0,1[$, comparer $g(x)$ et $\dfrac{x}{1-x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$.

3. Déterminer la nature des séries $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$ et $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)x^n$?

$$\text{Soit, pour tout } x \in]-1,+1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)x^n.$$

4. Pour tout $x \in]-1,+1[$, comparer $f(x)$ et $(1-x)g(x)$. En déduire que $g(x)$ possède une limite finie quand x tend vers -1^+.