

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE T.D. N° 10
Variables aléatoires

11 JANVIER 2025

Exercice 1. 1. Une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} suit une loi de probabilité vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n + 1) = \frac{4}{n + 1} P(X = n).$$

Déterminer la loi de probabilité de X , c'est-à-dire calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soient un réel $p \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = p \cdot P(X \geq n).$$

Quelle est cette loi de probabilité ?

1. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = P(X = 0) \frac{4^n}{n!}.$$

En utilisant le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 0) \frac{4^n}{n!} = 1$ on obtient

$$P(X = n) = e^{-4} \frac{4^n}{n!}.$$

Donc X suit une loi de Poisson de paramètre 4.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) - P(X = n + 1) = p \cdot P(X \geq n) - p \cdot P(X \geq n + 1) = p \cdot P(X = n)$$

car $(X \geq n) = (X = n) \cup (X \geq n + 1)$ et cette union est disjointe. On en déduit la relation

$$P(X = n + 1) = (1 - p)P(X = n)$$

qui permet de démontrer par récurrence que : $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} P(X = 1)$.

Pour déterminer $P(X = 1)$, on remarque que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X = n)$ est une union certaine et disjointe, d'où :

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p)^{n-1} P(X = 1) = \frac{1}{1 - (1 - p)} P(X = 1).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p.$$

La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p .

Autre méthode : l'hypothèse $P(X = n) = p \cdot P(X \geq n)$ implique, pour $n = 1$, que $P(X = 1) = p \cdot P(X \geq 1)$. Or $(X \geq 1)$ est l'événement certain, d'où $P(X \geq 1) = 1$, donc $P(X = 1) = p$ et on conclut comme ci-dessus.

Exercice 2 (Loi de Poisson). Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

1. Exprimer l'événement « X prend une valeur paire » comme une union disjointe. De même pour l'événement « X prend une valeur impaire ».
2. Calculer la probabilité que la valeur de X soit paire et calculer la probabilité que la valeur de X soit impaire. Comparer ces deux probabilités.

3. Soit n un entier naturel tel que $n + 1 > \lambda$. Montrer que :

$$P(X \geq n) \leq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}}.$$

4. En déduire que : $P(X \geq n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} P(X = n)$.

5. Montrer que : $P(X > n) = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(P(X = n))$.

1. L'événement « X prend une valeur paire » est $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)$ tandis que l'événement « X prend une valeur impaire » est

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k + 1) \text{ et ces unions sont disjointes.}$$

2. La variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ , d'où $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$. La probabilité que la valeur de X soit :

— paire est $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k) = e^{-\lambda} \cdot \text{ch}(\lambda)$;

— impaire est $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k + 1) = e^{-\lambda} \cdot \text{sh}(\lambda)$

d'après la question précédente. La valeur de X a plus de chances d'être paire qu'impaire car

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ch} \lambda = \frac{e^{+\lambda} + e^{-\lambda}}{2} > \text{sh} \lambda = \frac{e^{+\lambda} - e^{-\lambda}}{2}.$$

3. Soit n un entier naturel tel que $n + 1 > \lambda$. L'événement $(X \geq n)$ est égal à $\bigcup_{k \geq n} (X = n + k)$ et cette union est disjointe, d'où :

$$P(X \geq n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = n + k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k n!}{(n+k)!}.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}, 0 \leq \frac{\lambda^k n!}{(n+k)!} \leq \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^k$ et la série géométrique $\sum \left(\frac{\lambda}{n+1}\right)^k$ converge car $n + 1 > \lambda$. Sa somme est $\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}}$. Donc $P(X \geq n) \leq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}}$.

4. Pour chaque $n \in \mathbb{N}, (X = n) \subset (X \geq n)$, d'où $P(X = n) \leq P(X \geq n)$ par croissance de la probabilité. Par suite, $P(X = n) \leq P(X \leq n) \leq P(X = n) \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{n+1}}$ d'après la question précédente. On divise par $P(X = n)$ qui n'est pas nul

et, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{P(X \geq n)}{P(X = n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Donc $P(X \geq n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} P(X = n)$.

5. $(X \geq n) = (X > n) \cup (X = n)$ et cette union est disjointe, d'où

$$P(X \geq n) = P(X > n) + P(X = n),$$

donc $P(X > n) = P(X \geq n) - P(X = n)$.

Or $P(X \geq n) \sim P(X = n)$, d'où $P(X \geq n) = P(X = n) \cdot (1 + \varepsilon_n)$.

D'où $P(X > n) = P(X = n) \cdot (1 + \varepsilon_n) - P(X = n) = P(X = n) \cdot \varepsilon_n$.

Donc $P(X > n) = \underset{n \rightarrow \infty}{o}(P(X = n))$.

Exercice 3 (tiré de MINES PONTS MATHS 2 PC 2017).

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue $n + 1$ tirages avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, alors $X = 5$. Pour modéliser cette expérience aléatoire, on introduit l'univers $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^{n+1}$.

1. Soit $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$: montrer que l'événement $(X = k)$ n'est pas vide et que sa probabilité $P(X = k)$ n'est pas nulle.

2. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $P(X > k) \neq 0$ et :

$$P(X > k+1) = P(X > k+1 | X > k) \cdot P(X > k).$$

3. Pour chaque $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, déterminer $P(X > k+1 | X > k)$.

4. En déduire $P(X > k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Il y a équiprobabilité, d'où $P(X = k) = \frac{\text{Card}(X=k)}{\text{Card}(\Omega)}$. Or l'événement $(X = k)$ n'est pas vide car le résultat $(1, 2, \dots, k-1, 1, \dots, 1)$ appartient à cet événement, d'où $\text{Card}(X = k) \neq 0$, donc $P(X = k) \neq 0$.

2. L'événement $(X = n+1)$ est inclus dans $(X > k)$, d'où (par croissance de la proba) $P(X > k) \geq P(X = n+1)$ qui est strictement positif d'après la première question.

Les événements $(X > k+1)$ et $(X > k) \cap (X > k+1)$ sont égaux, d'où $P(X > k+1) = P[(X > k) \cap (X > k+1)] = P(X > k) \cdot P(X > k+1 | X > k)$ d'après la formule des probabilités composées.

3. Calculons $P_{(X > k)}(X > k+1)$. On sait que $(X > k)$, donc on a tiré k boules distinctes deux à deux lors des k premiers tirages. L'événement $(X > k+1)$ est réalisé si, et seulement si, on tire une $(k+1)$ -ième boule différente des k premières. Par équiprobabilité, $P_{(X > k)}(X > k+1) = \frac{n-k}{n}$.

4. $P(X > k) = P(X > 1) \times \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n}$. Or $(X > 1) = \Omega$, d'où $P(X > 1) = 1$. Et $\prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{1}{n^{k-1}} \prod_{i=n-1}^{n-k+1} i = \frac{1}{n^{k-1}} \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$.

$$\text{Donc } P(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}.$$

Exercice 4 (Loi binomiale, espérance & variance). Un marcheur se déplace sur une droite en faisant un pas vers la droite avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou vers la gauche avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n sa position après n pas et D_n le nombre de pas vers la droite parmi ces n pas.

Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de la variable aléatoire D_n . En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_n .

Les n pas sont des épreuves de Bernoulli, qu'on suppose indépendantes. La variable aléatoire D_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, d'où

$$\begin{cases} D_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(D_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ E(D_n) = np \\ V(D_n) = npq \end{cases}.$$

Or $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$ est la position après D_n pas vers la droite et $n - D_n$ pas vers la gauche. D'où

$$\begin{cases} X_n(\Omega) \subset \llbracket -n, +n \rrbracket \\ \forall k \in \llbracket -n, +n \rrbracket, P(X_n = k) = P\left(D_n = \frac{n+k}{2}\right) \\ E(X_n) = E(2D_n - n) = 2E(D_n) - n = 2np - n \\ V(X_n) = V(2D_n - n) = 4V(D_n) = 4npq \end{cases}.$$

Exercice 5 (Le problème du collectionneur, loi géométrique & espérance). Chaque paquet de lessive de la marque *Bonux* contient un cadeau, choisi au hasard parmi n cadeaux équiprobables. On note S_k le nombre de paquets achetés jusqu'à obtenir k cadeaux différents. (Par suite $S_1 = 1$ et, pour chaque $k \geq 2$, S_k est une variable aléatoire.)

1. Pour chaque $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, soit $X_k = S_k - S_{k-1}$. Déterminer la loi de probabilité de X_k .

2. En déduire l'espérance $E(S_n)$ et montrer que $E(S_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.



FIGURE 1 – BONUX

1. Pour chaque $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, la variable aléatoire $X_k = S_k - S_{k-1}$ est le temps d'attente d'un succès. On appelle succès : obtenir un cadeau différent des $k - 1$ cadeaux déjà obtenus. La probabilité d'un succès est donc $p_k = \frac{n - (k - 1)}{n}$ et la variable aléatoire X_k suit une loi géométrique de paramètre p_k car les achats forment une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
2. $S_n = (S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_2 - S_1) + S_1 = 1 + \sum_{k=2}^n X_k$. D'où (par linéarité de l'espérance) :

$$E(S_n) = 1 + \sum_{k=2}^n E(X_k). \text{ Or } E(X_k) = \frac{1}{p_k} = \frac{n}{n - (k - 1)}. \text{ D'où } E(S_n) = 1 + \frac{n}{n - 1} + \frac{n}{n - 2} \dots + \frac{n}{2} + \frac{n}{1} = n \cdot H_n, \text{ où}$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n \text{ (ne pas oublier de le démontrer en comparant série et intégrale).}$$
 Donc $E(S_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \cdot \ln(n)$.

Exercice 6 (Série génératrice & espérance). Au concours de saut en hauteur, Zébulon tente de franchir une à une les hauteurs $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Au premier échec, Zébulon est éliminé. La probabilité de franchir chaque hauteur n est $\frac{1}{n}$. On suppose les sauts indépendants et on note X le numéro du dernier saut réussi par Zébulon.



FIGURE 2 – ZÉBULON

1. Proposer un univers Ω et déterminer l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X .
2. Déterminer la loi de X , vérifier par le calcul que $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$. Qu'en déduire ?
3. Ecrire la série génératrice de la variable aléatoire X , montrer que son rayon de convergence est infini et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad G_X(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t}.$$

4. En déduire que la variable X est d'espérance finie et calculer $E(X)$, c'est-à-dire la hauteur que peut espérer franchir Zébulon.

1. L'univers Ω ne sert pas à grand chose ici mais puisqu'on le demande : appelons résultat une suite de E (pour échec) et de S (pour succès), en faisant comme si Zébulon continuait de sauter même après avoir échoué : alors $\Omega = \{S; E\}^{\mathbb{N}^*}$. L'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X est $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On a supposé que Zébulon n'est pas Superman et finira donc par échouer, mais les amateurs de super-héros poseront $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.
2. L'événement $(X = k)$ est « le sportif réussit les k premiers sauts et rate le $(k + 1)$ -ième saut. » En supposant les sauts indépendants, on obtient :

$$P(X = k) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

On peut aussi écrire $P(X = k) = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$, pour faire apparaître un télescope. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^N P(X = k) = 1 - \frac{1}{(N+1)!} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1.$$

On en déduit que l'événement « Zébulon passe toutes les hauteurs » est presque impossible.

3. La série génératrice de la variable aléatoire X est la série entière

$$\sum P(X = k) \cdot t^k = \sum \frac{k}{(k+1)!} t^k.$$

Son rayon de convergence est $+\infty$ car (règle de D'Alembert) : $\frac{\left| \frac{k+1}{(k+2)!} t^{k+1} \right|}{\left| \frac{k}{(k+1)!} t^k \right|} = \frac{k+1}{k(k+2)} |t| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) \cdot t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} t^k = t \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k}{(k+1)!}.$$

On peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = t \cdot \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!}.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k+1)!} = \frac{e^t - 1 - t}{t}$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$G_X(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t}.$$

4. La fonction G_X est dérivable en 1, donc la variable aléatoire X est d'espérance finie et $E(X) = G'_X(1)$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $G'_X(t) = \frac{d}{dt} \frac{te^t - e^t + 1}{t} = \frac{t^2 e^t - te^t + e^t - 1}{t^2}$. Donc $E(X) = e - 1$.

Exercice 7 (Loi binomiale, inégalité de Markov & inégalité de concentration).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels p et q dans $]0, 1[$ tels que $q \geq p$ et S_n une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

1. Soit un réel $u \geq 0$. Rappeler l'espérance $E(S_n)$. Montrer que la variable aléatoire e^{uS_n} est d'espérance finie et que $E(e^{uS_n}) = (1 - p + pe^u)^n$.
2. Montrer que

$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p+pe^u)^n}{e^{\frac{p+q}{2}nu}}.$$

3. On note $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \ln(1 - p + pe^u)$.

(a) Exprimer $g''(u)$ sous la forme $\frac{\alpha(u)\beta(u)}{(\alpha(u) + \beta(u))^2}$.

(b) Montrer que $g''(u) \leq \frac{1}{4}$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que :

$$\forall u \geq 0, \quad \ln(1 - p + pe^u) \leq pu + \frac{u^2}{8}.$$

4. Prouver l'inégalité de concentration suivante :

$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

1. $S_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et, pour chaque $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

La variable aléatoire S_n possède une espérance, égale à $E(S_n) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) \cdot k = np$.

D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire e^{uS_n} possède aussi une espérance car l'ensemble $S_n(\Omega)$ est fini et cette espérance est égale à

$$E(e^{uS_n}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{ku} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^u)^k (1-p)^{n-k} = (1-p + pe^u)^n.$$

2. Pour rappel (de l'inégalité de Markov) : si X une variable aléatoire, à valeurs positives, possédant une espérance $E(X)$, alors, pour tout $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$.

Si $u = 0$, l'inégalité est banale. Supposons $u > 0$. On choisit $a = e^{\frac{p+q}{2}nu} > 0$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $X = e^{uS_n}$, qui est bien à valeurs positives. Les deux événements $(X \geq a)$ et $(S_n \geq \frac{p+q}{2}n)$ sont égaux (car la fonction $t \mapsto \exp(ut)$ est strictement croissante), d'où :

$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p + pe^u)^n}{e^{\frac{p+q}{2}nu}}.$$

3. (a) La fonction g est deux fois dérivable. Pour tout $u \geq 0$, $g'(u) = \frac{pe^u}{1-p+pe^u}$ et $g''(u) = \frac{qpe^u}{(q+pe^u)^2} = \frac{\alpha(u)\beta(u)}{(\alpha(u)+\beta(u))^2}$, en notant $\alpha(u) = q$ et $\beta(u) = pe^u$.

(b) Or $[\alpha(u) + \beta(u)]^2 \geq 4\alpha(u)\beta(u)$ car $[\alpha(u) + \beta(u)]^2 - 4\alpha(u)\beta(u) = [\alpha(u) - \beta(u)]^2 \geq 0$, donc $g''(u) \leq \frac{1}{4}$.

(c) La fonction g'' est continue, d'où : $g'(u) - g'(0) = \int_0^u g''(t) dt \leq \int_0^u \frac{1}{4} dt = \frac{u}{4}$ par croissance de l'intégrale. Or $g'(0) = p$, d'où $g'(u) \leq p + \frac{u}{4}$. La fonction g' est continue, d'où $g(u) - g(0) = \int_0^u g'(t) dt \leq \int_0^u (p + \frac{t}{4}) dt = pu + \frac{u^2}{8}$ par croissance de l'intégrale. Or $g(0) = 0$, donc : $g(u) \leq pu + \frac{u^2}{8}$.

4. On a montré que, pour tout $u \geq 0$,

$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq \frac{(1-p + pe^u)^n}{e^{\frac{p+q}{2}nu}}. \quad (*)$$

$$\text{Or } \frac{(1-p + pe^u)^n}{e^{\frac{p+q}{2}nu}} = e^{ng(u) - \frac{p+q}{2}nu} \leq e^{n\left[pu + \frac{u^2}{8} - \frac{p+q}{2}u\right]}.$$

Alors $\left[pu + \frac{u^2}{8} - \frac{p+q}{2}u\right] = -\frac{1}{8} \cdot u \cdot (4(q-p) - u) = -\frac{(p-q)^2}{2}$ si $u = 2(q-p)$. L'inégalité (*) étant vraie pour tout $u \geq 0$, elle l'est en particulier si $u = 2(q-p)$ qui est bien positif car on suppose que $q \geq p$. Donc

$$P\left(S_n \geq \frac{p+q}{2}n\right) \leq e^{-n\frac{(p-q)^2}{2}}.$$

Exercice 8 (Fonction de répartition & continuité décroissante). Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{R} . La **fonction de répartition** de X est la fonction définie par

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad a \mapsto F_X(a) = P(X \leq a).$$

1. Montrer que la fonction F_X est croissante.
2. En utilisant la fonction F_X , calculer $P(a < X \leq b)$ pour tout $a \leq b$.
3. Soit (a_n) une suite de réels tendant vers $-\infty$ en décroissant. En utilisant la suite des événements $A_n = (X \leq a_n)$, montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
4. Etudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x)$.

5. Soit un réel a . Soit a_n une suite de réels tendant vers a en décroissant. En utilisant la suite des événements $B_n = (X \leq a_n)$, montrer que F est continue à droite en a .
6. En utilisant la suite des événements $C_n = (a - \frac{1}{n} < X \leq a)$, montrer que $F(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F(x) + P(X = a)$.
- À quelle condition la fonction de répartition est-elle continue en a ?

1. Soient deux réels a et b . Si $a \leq b$, alors $(X \leq a) \subset (X \leq b)$, d'où (par croissance de la probabilité) : $P(X \leq a) \leq P(X \leq b)$.
2. Soient deux réels a et $b :] - \infty, b] =] - \infty, a] \cup]a, b]$, d'où $X^{-1}(] - \infty, b]) = X^{-1}(] - \infty, a]) \cup X^{-1}(]a, b])$, d'où $(X \leq b) = (X \leq a) \cup (a < X \leq b)$ et cette union est disjointe, d'où $P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$.
3. D'après le théorème de la limite monotone, la fonction F_X possède une limite ℓ_1 en $-\infty$, finie ou infinie. Soit (a_n) une suite de réels qui tend vers $-\infty$ en décroissant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'événement $A_{n+1} = (X \leq a_{n+1})$ est inclus dans l'événement $A_n = (X \leq a_n)$, d'où (par le théorème de continuité décroissante) : $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$. Or $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$. D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(a_n) = 0$, donc $\ell_1 = 0$.
4. D'après le théorème de la limite monotone, la fonction F_X possède une limite ℓ_2 en $+\infty$, finie ou infinie. Soit (a_n) une suite de réels qui tend vers $+\infty$ en croissant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'événement $A_n = (X \leq a_n)$ est inclus dans l'événement $A_{n+1} = (X \leq a_{n+1})$, d'où (par le théorème de continuité croissante) : $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$. Or $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$. D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(a_n) = 1$, donc $\ell_2 = 1$.
5. Soient un réel a et une suite (a_n) qui tend vers a en décroissant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'événement $B_{n+1} = (X \leq a_{n+1})$ est inclus dans l'événement $B_n = (X \leq a_n)$, d'où (continuité décroissante) : $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$.
- Or $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ est l'événement $(X \leq a)$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(a_n) = F_X(a)$. Or la fonction F est croissante, elle admet donc une limite en a^+ . Comme $a_n \rightarrow a^+$, on en déduit $\lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x) = F_X(a)$. Donc la fonction F_X est continue à droite en a .
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de l'événement $C_n = (a - \frac{1}{n} < X \leq a)$ est (*) : $P(C_n) = F_X(a) - F_X(a - \frac{1}{n})$ d'après le 1.
- D'après le théorème de continuité décroissante, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = P(X = a)$ car $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$ est l'événement $(X = a)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_{n+1} \subset C_n$. De plus, la fonction F_X est croissante, d'où (théorème de la limite monotone), la fonction F_X admet une limite en a^- , d'où $F_X\left(a - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x)$.
- D'où l'égalité (*) passe à la limite : $F_X(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x) + P(X = a)$. La fonction F_X est donc continue à gauche en a ssi $P(X = a) = 0$. Elle est par ailleurs toujours continue à droite en a d'après la question précédente. Donc la fonction de répartition est continue en a ssi $P(X = a) = 0$.