Corrigé de la colle n° 13

Séries entières

11 janvier 2025

Exercice 1 (tiré de CCINP 2018 MP Math 1)**.** Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$.

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. En utilisant une série entière, montrer que la suite des réels
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$$
tend vers le réel I et proposer un encadrement de $|I - S_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que
$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}$$
en utilisant la suite des fonctions
$$f_n \,:\, x \mapsto \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n .$$

Voir le corrigé manuscrit ci-dessous.

Exercice 2 (tiré de CCINP Maths 1 MP 2019)**.**

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1.

Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1, +1[$, $f_n(x) = a_n \dfrac{x^n}{1 - x^n}$.

On étudie la série de fonctions $\sum f_n$ qui n'est pas une série entière.

1. Démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série numérique $\sum a_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

On note, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2. Soit un réel $b \in]0, 1[$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur $[-b, b]$.
En déduire que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]-1, 1[$ et exprimer, pour tout $x \in]-1, +1[$, $f'(x)$ comme la somme d'une série.

3. En utilisant une série entière, déterminer la valeur ℓ de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
4. Dans cette question, $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \geq 1$.
   (a) Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.
   (b) Soit, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +1[$, $h_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}}$. Montrer que la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.
   (c) En déduire, en fonction de ℓ, un équivalent de $f(x)$ quand x tend 1^-.

---

1. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $1 - x^n \underset{n\to\infty}{\sim} 1$ et $\frac{|a_n x^n|}{1-x^n} \underset{n\to\infty}{\sim} |a_n x^n|$. Or le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1 par hypothèse, donc la série $\sum |a_n x^n|$ converge et, par comparaison, la série $\sum \left|\frac{a_n x^n}{1-x^n}\right|$ converge aussi.
2. Soit $b \in]0, 1[$. Chaque fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-b, +b]$ et : $\forall x \in [-b, +b]$, $\;f_n'(x) = a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$.

   La série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément (car normalement) sur $[-b, b]$. En effet $\forall x \in [-b, b]$, $\;|f_n'(x)| \leq \frac{|na_n|b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ car $x^n \leq b^n < 1$, d'où $-1 < -b^n \leq -x^n$, d'où $0 < 1 - b^n \leq 1 - x^n$, d'où $0 \leq \frac{1}{1-x^n} \leq \frac{1}{1-b^n}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $\frac{1}{(1-x^n)^2} \leq \frac{1}{(1-b^n)^2}$ car la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$. Or la série $\sum \frac{na_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}$ converge absolument car un équivalent de $\left|\frac{na_n b^{n-1}}{(1-b^n)^2}\right|$ est $\left|na_n b^{n-1}\right|$ qui ne change pas de signe et le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à celui de $\sum na_n x^n$ car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence.

   D'une part, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[-b, +b]$ d'après la question 1.
   D'autre part, la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément comme il vient d'être prouvé.

   Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-b, +b]$ et $\forall x \in [-b, +b], f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{nx^{n-1}}{(1-x^n)^2}$. Ceci est vrai sur tout $[-b, b] \subset]-1, 1[$, donc encore vrai sur $]-1, +1[$.
3. Le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est 1 et
$$\forall x \in]-1, 1[, \; \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}.$$
   Or la série numérique $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées car la suite des réels $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant. D'où, d'après le théorème radial d'Abel,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = -\ln(2).$$
4. (a) De la question 2, on déduit que f est dérivable et que $f(0) = a_0 = 1$ et $f'(0) = a_1 = -1$. Doù $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$.

   Voir aussi : le corrigé de l'exo 2 de la colle 8.

   (b) Soit $x \in [0, 1[$. La suite de réels $h_n(x)$:
   — tend vers 0 car $0 \leq h_n(x) \leq \frac{x^n}{nx^{n-1}} \leq \frac{1}{n}$;
   — en décroissant car les deux suites $(x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{1+x+x^2+...+x^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont décroissantes et positives.

   D'après le théorème des séries alternées, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k(x)\right| \leq |h_{n+1}(x)| \leq \dfrac{1}{n+1}$ car $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \geq x^n + x^n + x^n + \cdots + x^n = (n+1)x^n$.

   Or $\frac{1}{n+1}$ est un majorant et le *sup* est le plus petit majorant. D'où $\displaystyle\sup_{x\in[0,1[} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k(x)\right| \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où la suite des restes converge vers 0 uniformément sur $[0, 1[$, donc la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.

(c) Pour tout $x \in]-1,+1[$,

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n \frac{(1-x)}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{1+x+x^2+...+x^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x).$$

Or $h_n(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et la série de fonctions $\sum h_n$ converge uniformément sur $[0,1[$, d'où (théorème de la double limite) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'où $(1-x)f(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\ln(2)$. Donc $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{-\ln 2}{1-x}$.

Mathématiques · Colle 13

Merci à Romain Lelaidier

Exercice 1

1. La série entière $\sum \frac{x^k}{k!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x^2 \in]-\infty, +\infty[$ donc la série $\sum \frac{(-x^2)^k}{k!}$ converge et

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = e^{-x^2}$. Donc la série entière $\sum \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$ a pour rayon de convergence $+\infty$, donc la série de fonctions $\sum g_k$ converge uniformément sur le segment $[0,1] \subset]-\infty, +\infty[$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : x \mapsto \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$

On peut donc échanger somme et intégrale : $\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 g_k(x)\,dx$

d'où $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$

de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est continue sur $[0,1]$.

d'où $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I$.

La suite $\left(\frac{1}{k!(2k+1)}\right)$ tend vers zéro en décroissant. D'après le théorème des séries alternées, $|I - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$

Oui

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. pour tout $x \in [0,1]$,
$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{x^2}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k} x^{2k}$

d'où $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$

Soit $x \in [0,1]$. $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$

$= \exp\left(-x^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x^2}$ car exp est continue.

De plus,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$
et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0,1]$. ~~Et~~ f est continue sur $[0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, par concavité de la fonction ln,
$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$ d'où $n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -x^2$

et par croissance de l'exponentielle, $|f_n(x)| = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} \leq e^{-x^2} = f(x)$ ✱
La fonction f est intégrable sur $[0,1]$ car continue sur ce segment.
D'après le théorème de la convergence dominée,
$\int_0^1 f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$.

donc $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = I$.

Comme pour tout $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$, on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$

D'où $I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$

Oui !

✱ oui. Une autre fonction dominante possible est $\varphi : x \mapsto 1$ car $\begin{cases} \forall x \in [0,1], |f_n(x)| \leq 1 \\ \text{l'intégrale } \int_0^1 1\,dx \text{ converge.} \end{cases}$