Programme de la colle n° 15

Semaine du 20/01/2025

Variables aléatoires ▷ **chapitre X & TD n° 10** :

— loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ (la loi binomiale tend vers la loi de Poisson si $n \to \infty$ et $np_n \to \lambda$) ;

— une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ est d'espérance finie (ou X possède une espérance ou $X \in L^1$) si la série $\sum aP(X=a)$ est absolument convergente (en particulier, l'espérance est finie si l'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou la *vard* X est une fonction bornée) ;

— linéarité de l'espérance $E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta$;

— si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors X est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum P(X \geq n)$ converge, auquel cas

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)\,;$$

— espérance des trois lois classiques ;

— théorème de transfert ;

— si X^2 est d'espérance finie, alors X aussi et on peut définir la variance

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2\,;$$

— si $P(X=a)=1$ alors $E(X)=a$ et $V(X)=0$;

— $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X)$;

— variance des trois lois classiques ;

— inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev ;

— la série génératrice d'une *va* X telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$; elle converge normalement sur $[-1,+1]$ au moins, la fonction génératrice G_X est donc définie et continue sur $[-1,+1]$ au moins et est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,+R[$;

— expression de la loi de probabilité ($P(K=k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$), de l'espérance (X est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est dérivable en 1, et alors $E(X) = G'_X(1)$) et de la variance (X^2 est d'espérance finie si, et seulement si, G_X est deux fois dérivable en 1, et alors $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$) ;

— savoir retrouver les fonctions génératrices des *va* qui suivent les trois lois classiques et en déduire leur espérance et leur variance.