Feuille de T.D. n° 11

Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Pour chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N(P) = |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)|\,dt.$$

Montrer que la fonction N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Soient $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ et $\|f\|_\infty$ les trois normes classiques d'une fonction f de E.

1. Soit la suite des fonctions f_n définies par $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n\|_1$, $\|f_n\|_2$ et $\|f_n\|_\infty$.
2. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 3.
Soit E l'espace vectoriel des suites u bornées telles que $u_0 = 0$.

1. Montrer que
$$\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \qquad \text{et} \qquad N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$
sont deux normes sur E.
2. Déterminer un réel k tel que : $\forall u \in E, \quad N(u) \leq k \cdot \|u\|$.
3. Quel est le meilleur k possible ?
4. Soit un réel $a \in]0,1[$. Soit u la suite définie par
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + a^n.$$
Calculer $N(u)$ et $\|u\|$.
5. Les normes $\|\cdot\|$ et $N(\cdot)$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 4 (*Une fonction additive et continue est linéaire*)**.**

Soient E un espace vectoriel et $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une fonction **additive**, *i.e.* $\forall (u,v) \in E^2,\ \varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.

1. Soit un vecteur $x \in E$. Montrer que :
   (a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(nx) = n\varphi(x)$;
   (b) pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(kx) = k\varphi(x)$;
   (c) pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $\varphi\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}\varphi(x)$.
2. On munit l'espace vectoriel E d'une norme et on suppose que la fonction φ est additive et continue. Montrer que :
   (a) pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ $\triangleright$ **densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$**
   (b) la fonction φ est linéaire.

Exercice 5 (Mines Ponts PC 2009)**.**

Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)x = u^{n+1}(y) - y$.
2. On suppose que u est 1–lipschitzien. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

Exercice 6. Soit un entier $n \geq 2$. On munit l'ev $\mathscr{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de la norme définie par

1. $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

   (On a déjà montré que c'est une norme, qu'elle est subordonnée et donc sous-multiplicative ▷ **exemple 45 et proposition 44 du chapitre XI**). Justifier que la trace tr est une forme linéaire continue et déterminer, en fonction de n, sa norme subordonnée $|||\mathrm{tr}|||$.
2. $\|M\| = \max_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} |m_{ij}|$.

   Montrer que cette norme n'est pas sous-multiplicative mais que $n\|\cdot\|$ est une norme sous-multiplicative.
3. $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M^T M)}$.

   Montrer que cette norme est sous-multiplicative ▷ **une inégalité de Cauchy-Schwarz dans** $\mathbb{R}^n$. Mais qu'elle n'est pas une norme subordonnée ▷ **calculer** $\|I_n\|$.

Exercice 7 (inégalités de Young, de Hölder & de Minkowski)**.**

Soient deux réels $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient u et v deux réels positifs. Prouver l'inégalité de Young

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

   de deux manières :

   (a) en étudiant, pour tout $v \geq 0$ fixé, la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \; u \mapsto \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$;

   (b) en utilisant la **concavité** de la fonction ln.
2. Soient deux réels $a < b$ et l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b])$.

   (a) Soient F et G deux fonctions positives de E telles que $\int_a^b F^p = \int_a^b G^q = 1$. Montrer que $\int_a^b FG \leq 1$.

   (b) Soient f et g deux fonctions positives de E. Prouver l'inégalité de Hölder

$$\int_a^b fg \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b g^q\right)^{1/q}.$$

   (c) Examiner le cas particulier où $p = q = 2$.
3. (a) Soient f et g deux fonctions positives de E. En remarquant que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p/q}$, prouver l'inégalité de Minkowski

$$\left(\int_a^b (f+g)^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b f^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b g^p\right)^{1/p}.$$

   (b) Montrer que $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$ définit une norme sur l'espace vectoriel E.

   ▷ **Dans le corrigé, on prouve aussi que :** $\|f\|_p \underset{p \to \infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$.

Exercice 8 (Séries entières & convergence uniforme)**.** Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n défini par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Soit $R > 0$. On munit l'*ev* $E = \mathcal{C}([-R, +R])$ de la norme ∞.

1. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'*evn* E. Quelle est sa limite ?
2. L'ensemble des fonctions polynomiales est-il un fermé de l'espace vectoriel normé E ?
3. Montrer que, à partir d'un certain rang N, aucun polynôme P_n ne s'annule sur l'intervalle $[-R, +R]$.

Exercice 9.
1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, $A^n = 0$. En déduire que l'ensemble des matrices nilpotentes de taille n est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que toute matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10 (*Une norme est euclidienne* ssi *elle vérifie l'identité du parallélogramme*)**.**

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Soit $f \,:\, E^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

1. Soient x, y et z trois vecteurs de E. Montrer que :
   (a) $f(x + y, z) + f(x - y, z) = 2f(x, z)$;
   (b) $f(0_E, z) = 0$ et $f(2x, z) = 2f(x, z)$;
   (c) $f(x, z) + f(y, z) = f(x + y, z)$.
2. Montrer que la fonction f est bilinéaire, symétrique, définie et positive
   ▷ **l'exercice 4 de ce TD et le corollaire 36 du chapitre XI**.
3. En déduire qu'il existe un unique produit scalaire tel que $\forall v \in E,\ \langle v|v\rangle = \|v\|^2$.

Exercice 11. Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leur adhérence. Montrer que :

1. si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$;
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
3. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$;
4. Soit $E = \mathbb{R}$. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $\bar{A} \cap \bar{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

Exercice 12 (Un hyperplan est, ou bien fermé, ou bien dense)**.** Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $\bar{F}$ son adhérence.

1. Montrer que $\bar{F}$ est un *sev* de E.
2. Soit un vecteur $u \in E$. On suppose que $E = \mathrm{Vect}(u) \oplus F$ et $F \neq \bar{F}$.
   (a) Montrer que : il existe un vecteur $v \in \bar{F}$ tel que $E = \mathrm{Vect}(v) \oplus F$.
   (b) En déduire que F est dense dans E.

3. On munit l'*ev* $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie pour tout polynôme P par $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$.
   (a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(0)$ est continue mais que l'application $g : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R},\ P \mapsto P(2)$ ne l'est pas.
   (b) Que dire de l'hyperplan $F = \mathrm{Ker}(f)$? Et de l'hyperplan $G = \mathrm{Ker}(g)$?

Exercice 13 (**distance d'un vecteur à un ensemble**)**.** Soit A une partie non vide d'un *evn* E. Pour tout vecteur $x \in E$, on appelle *distance de x à A* et on note $d(x, A)$ le réel

$$d(x, A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

1. Justifier que le réel $d(x, A)$ est bien défini.
2. Montrer que la distance de x à A est nulle si, et seulement si, x est adhérent à A, *i.e.*

$$d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}.$$

3. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que : $\forall a \in A,\ d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|$. En déduire que :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|.$$

   Qu'en déduire sur l'application $x \mapsto d(x, A)$?
4. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \left\{x \in E \mid d(x, A) < \frac{1}{n}\right\}$.
   (a) Montrer que l'ensemble A_n est un ouvert de E et déterminer l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.
   (b) En déduire que tout fermé de E est une intersection dénombrable d'ouverts. Et que tout ouvert de E est une réunion dénombrable de fermés.

Exercice 14 (inégalité de Bessel, égalité de Parseval & polynômes orthogonaux)**.**

Soit E un espace préhilbertien et $\|\cdot\|_2$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Soit x un vecteur de E.

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $F_n = \mathrm{Vect}\left(e_k, k \in [\![0, n]\!]\right)$. Montrer que la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ est décroissante.
2. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **totale**, *i.e.* $\mathrm{Vect}(\mathrm{e}_n, n \in \mathbb{N})$ est dense dans E. Montrer que la suite des réels $\|x - p_n(x)\|_2$ tend vers 0.
3. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée**, *i.e.* $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2,\ \langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$. Prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{k=0}^{n} \langle x|e_k\rangle^2 \leq \|x\|_2^2.$$

   En déduire que la série numérique $\sum \langle x|e_k\rangle^2$ converge.
4. On suppose que la suite des vecteurs e_n est **orthonormée** et **totale**. Prouver l'égalité de Parseval :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \langle x|e_k\rangle^2 = \|x\|_2^2.$$

5. Soient deux réels $a < b$. On munit l'ev $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ pour tout $(f, g) \in E^2$.
   (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) On note $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ la norme ∞ de toute fonction $f \in E$. Déterminer une contante K telle que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq K\|f\|_\infty$.
   (c) Soit $f \in E$. Montrer que $\|f - p_n(f)\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass.
   (d) Montrer que la série $\sum \langle f|e_n\rangle^2$ converge et déterminer sa somme.