Colle 13 Séries entières

SEVEL Victor

Exercice 1.

1. Déterminer le rayon de convergence de $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer $\exp(f(z))$. Ind. Considérer $t \in [0,1] \mapsto \exp(f(tz))$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

   $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant \alpha \Rightarrow \det(I_n + zA) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{tr}\left(A^k\right) z^k\right)$.

Solution **1.**

1. *En posant :* $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, (a_n) *ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, on peut appliquer la règle de d'Alembert :* $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} |\frac{n+1}{n}| = 1$ *, d'où* $R = 1$.

2. *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| < 1$, *et* $t \in [0,1]$. *Considérons* $y : t \mapsto exp(f(tz))$. *On a donc y dérivable comme composée de fonctions qui le sont (*$f \in C^\infty$ *développable en série entière donc on peut dériver terme à terme), et alors :*

$$y'(t) = zf'(zt)exp(f(zt)) = z(\sum_{k=1}^{\infty}(-zt)^k)y(t) = \frac{z}{1+zt}y(t).$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante : $y'(t) - \frac{z}{1+zt}y(t) = 0$ (E).
L'équation différentielle étant à coefficients complexes, on cherche à trouver y par analyse synthèse :
Analyse : *On va d'abord supposer que* $z \in \mathbb{R}$. *Alors :* $y : t \mapsto \lambda exp(ln(1+zt)) = \lambda(1+zt)$ *On prend alors* $\lambda = 1$ *et on va tester si la solution fonctionne pour* $z \in \mathbb{C}$.
Synthèse : *Considérons* $y : t \mapsto 1 + zt$ *avec* $z \in \mathbb{C}$. *Alors :* $y' : t \mapsto z$ *D'où :*

$$y'(t) - \frac{z}{1+zt}y(t) = z - \frac{z}{1+zt}(1+zt) = 0$$

et alors y vérifie bien l'équation différentielle à coefficients complexes (E).
Finalement, on en déduit que $exp(f(z)) = y(1) = 1 + z$.

3. *Sachant que* $\mathbb{C}$ *est algébriquement clos, A est trigonalisable et alors on note* $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ *ses coefficients de la diagonale.*
Alors, d'une part : $det(I_n + zA) = \prod_{i=0}^{n}(1 + z\lambda_i)$.
D'autre part : $tr(A^k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k$ *et pour que* $f(z\lambda_i)$ *soit définie, il faut que :* $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $|z\lambda_i| \leq 1$ *donc* $|z| \leq \frac{1}{|\lambda_i|}$, *d'où :* $0 \leq |z| \leq \dfrac{1}{\max_{i\in[\![0,n]\!]}|\lambda_i|} = \alpha$.

$$\begin{aligned}
\exp(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}tr(A^k)z^k) &= \exp((\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^k z^k) \\
&= \prod_{i=0}^{n}\exp((\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}(\lambda_i z)^k) \\
&= \prod_{i=0}^{n}\exp(f(\lambda_i z)) \\
&= \prod_{i=0}^{n}(1 + \lambda_i z) \\
&= \det(I_n + zA)
\end{aligned}$$

Finalement, il existe bien $\alpha > 0$ *tel que :* $exp(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}tr(A^k)z^k) = \det(I_n + zA)$.

GARREAU Anatole

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer l'équivalence entre

i) f est développable en série entière sur un voisinage de 0 ,

ii) il existe $\alpha > 0, M > 0$ et $a > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha, \alpha], \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M a^n n!$.

Solution **2.** *On procède par double implication :*
$\Leftarrow$: *s'il existe* $\alpha > 0, M > 0$ *et* $a > 0$ *tels que* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha, \alpha], \left|f^{(n)}(x)\right| \leq Ma^n n!$, *alors l'inégalité de Taylor Lagrange nous dit que*

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)\right| \leq M(ax)^{n+1}.$$

On pose $\beta = \min(\alpha, \frac{1}{a})$, *et pour tout* $x \in [-\beta, \beta]$, $(ax)^{n+1}$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers* $+\infty$.
$\Rightarrow$: *Si* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *pour tout* $x \in]-R, R[$ *où* $R > 0$ *est le rayon de convergence de la série, pour tout* $r \in [0, r[$ *et* $\theta \in [-\pi, \pi]$, *on a*

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i\,n\theta}$$

la convergence étant normale en θ *pour r fixé, car la série est absolument convergente sur le disque ouvert de convergence.*
Le théorème d'interversion série intégrale par convergence uniforme sur un segment, nous permet d'intégrer terme à terme pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) e^{-i\,p\theta}\, d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)\theta}\, d\theta = 2\pi a_l \Rightarrow \sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f(re^{i\,\theta})| \geq |a_n| r^n.$$

De plus, f *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et* $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. *On pose* $M_r = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$. *On a* $\left|\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \dfrac{M_r}{r^n}$.
Soit $z \in]-R/2, R/2[$, *alors pour tout* $h \in]-R/2, R/2[$, *la série*

$$f(z+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} z^{n-k} h^k \right).$$

Comme $|z| + |h| < R$, *la famille* $\left(\binom{n}{k} z^{n-k} h^k\right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ *est sommable. Le thérème de Fubini nous permet d'intervertir les sommes :*

$$\forall h \in]-R/2, R/2[, \;\; f(z+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_n \binom{n}{k} z^{n-k} \right) h^k$$

ce qui montre que f *est dévellopable en série entière en* z. *Le même raisonnement qu'en* 0 *montre que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| \leq \frac{M_r}{(r/2)^n}$$

On en déduit que $M = M_r$ *et* $\alpha = R/2$ *répondent à la question.*

KORCHIA Adrien

Exercice 3.

1. (a) Soit $a > 0$ et $f :]-a, a[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-a, a[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$$

Écrire la formule de Taylor $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ avec un reste intégrale et montrer que pour tout $x \in [0, a[$, la série de Taylor converge.

(b) Soient x et y tel que $0 < x < y < a$.

Montrer que $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)$. En déduire que $\forall x \in [0, a[, \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x)$

2. (a) Montrer que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(b) Montrer que les coefficients de ce développement $\tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sont donnés par :

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

Solution **3.**

1. (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,a[, f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$. *Par hypothèse, la série de Taylor* $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ *est une série à termes positifs et* $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{\geq 0} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\geq 0} dt \geq 0$.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,a[, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) - R_n(x) \leq f(x)$. *Les sommes partielles de la série à termes positifs* $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ *étant majorées, cette série converge. Donc la série de Taylor de* f *converge en tout point* $x \in [0,a[$.

   (b) *Soient* x *et* y *tel que* $0 < x < y < a$.
   Le changement de variable $t = \frac{x}{y}u$ *donne :*

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{x}{y}\int_0^y \frac{\left(x - \frac{x}{y}u\right)^n}{n!} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right)du = \left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)} \int_0^y \frac{(y-u)^n}{n!} f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right)du$$

   Or, la fonction $f^{(n+1)}$ *est croissante et* $f^{(n+1)}\left(\frac{x}{y}u\right) \leq f^{(n+1)}(u)$ *puisque* $\frac{x}{y} < 1$. *Donc*

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)} \int_0^y \frac{(y-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)du = \left(\frac{x}{y}\right)^{(n+1)} R_n(y)$$

   Pour $y < a$, *pour tout* $x \in [0,y[$, *on a la convergence uniforme du reste vers* 0. *Elle est donc somme d'une série entière sur* $]-a,a[$.

2. (a) *On montre par récurrence qu'il existe un polynôme* $Q_n(X)$ *à coefficients réels postifs tel que* $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan^{(n)}(x) = Q_n(\tan(x))$ *La question précédente nou dit que*

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

   car la fonction tangente étant impaire.

   (b) $a_0 = \tan(0) = 0$ *et* $a_1 = \frac{\tan'(0)}{1!} = 1$
   $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *et par dérivation,*

$$\tan'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 1 + \tan^2 x = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2$$

   Notons $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *le produit de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *par elle-même :*
   on a alors : $b_0 = a_0 a_0 = 0, b_1 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 0, b_2 = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = 1$ *et plus généralement,* $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$
   En identifiant les coefficients dans les deux séries entières $\tan'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = 1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *on obtient :* $\forall n \geq 1, (n+1)a_{n+1} = b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$
   soit aussi $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$

XXX