Corrigé de la colle n° 14

Séries entières

18 janvier 2025

Exercice 1. 1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.

2. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum \dfrac{x^n}{n^a+(-1)^n}$ est-elle convergente ? (On discutera suivant les valeurs du paramètre a.)

---

1. Soit, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n}$:
   — si $a < 0$, alors la suite u_n ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum u_n$ diverge.
   — si $a > 0$, alors on calcule le *D.L.*
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a} \cdot \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^a}} = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}}(1+\varepsilon_n).$$
   Or la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a}$ converge d'après la TSA car la suite $\frac{1}{n^a}$ tend vers zéro en décroissant. Et les séries $\sum \dfrac{1}{n^{2a}}(1+\varepsilon_n)$ et $\sum \dfrac{1}{n^{2a}}$ sont de même nature car les suites $\dfrac{1}{n^{2a}}$ (qui ne change pas de signe) et $\dfrac{1}{n^{2a}}(1+\varepsilon_n)$ sont équivalentes, donc convergent si, et seulement si, $2a > 1$.
   Donc la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.
2. Soit $c_n = \dfrac{1}{n^a+(-1)^n}$. La série $\sum c_n x^n$ est une série entière. On détermine son rayon de convergence R grâce au critère de D'Alembert : si $x \neq 0$, alors $|c_n x^n| > 0$ et
   $$\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|,$$
   d'où la série $\sum |c_n x^n|$ converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. Donc $R = 1$. Et aux bords ?
   — en $x = -1$, la série $\sum c_n x^n$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$ d'après l'étude précédente ;
   — en $x = +1$, la suite $c_n x^n = c_n$ est positive et équivalente à $\dfrac{1}{n^a}$, d'où la série $\sum c_n$ converge si, et seulement si, $a > 1$ d'après le critère de Riemann.

Exercice 2 (produit de Cauchy & théorème radial d'Abel)**.** 1. Rappeler le théorème du produit de Cauchy de deux séries numériques absolument convergentes. Et celui du produit de Cauchy de deux séries entières.

2. Quel est le terme général du produit de Cauchy des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, où $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$, pour tout $n \geqslant 1$, et $u_0 = v_0 = 0$? En déduire que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas toujours une série convergente.

3. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et, pour tout entier naturel n, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
   On suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent. Montrer, à l'aide du théorème radial d'Abel, que :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

1. Voir le cours.
2. Le terme général du produit de Cauchy est $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(k(n-k)\right)^{1/4}}$.

   Or $k(n-k) \leq \frac{n^2}{4}$ (par étude des variations de $x \mapsto x(n-x)$ ou bien en remarquant que $(n-2k)^2 \geq 0$), et par conséquent $|w_n| \geq \frac{\sqrt{2}(n-1)}{\sqrt{n}}$, ce qui montre que la série de terme général w_n diverge grossièrement.

   Donc le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas toujours convergent.
3. Puisque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, les séries entières $\sum u_n\, x^n$ et $\sum v_n\, x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. D'après le cours, le produit de Cauchy a un rayon de convergence supérieur ou égal au minimum des deux rayons, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n\, x^n$est lui aussi au moins égal à 1. Si l'on note $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, les sommes respectives, on a $U(x)V(x) = W(x)$, pour tout $x \in]-1, 1[$.

   Si x tend vers 1 par valeurs inférieures, alors $U(x)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $V(x)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ et $W(x)$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n$: c'est vrai par continuité des sommes U, V et W si les rayons sont strictement supérieurs à 1 ; et c'est encore vrai si un rayon vaut 1 d'après le théorème radial d'Abel car les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.

   Par unicité de la limite, le produit des deux premières sommes est égale à la troisième, c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Exercice 3.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \sqrt{n} x^n$.

$$\text{Soit, pour tout } x \in]-R, +R[,\ g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n.$$

2. Pour tout $x \in [0, 1[$, comparer $g(x)$ et $\frac{x}{1-x}$. En déduire $\lim_{x \to 1^-} g(x)$.
3. Déterminer la nature des séries $\sum \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$ et $\sum \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)(-1)^n$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n$.

$$\text{Soit, pour tout } x \in]-1, +1[,\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right) x^n.$$

4. Pour tout $x \in]-1, +1[$, comparer $f(x)$ et $(1-x)g(x)$. En déduire que $g(x)$ possède une limite finie quand x tend vers -1^+.

---

1. Soient $x \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$: alors $|\sqrt{n} x^n| > 0$ et

$$\frac{|\sqrt{n+1} x^{n+1}|}{|\sqrt{n} x^n|} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |x|,$$

   d'où la série $\sum |\sqrt{n} x^n| \begin{cases} \text{converge si } |x| < 1 \\ \text{diverge si } |x| > 1 \end{cases}$ d'après le critère de D'Alembert.

   Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{n} x^n$ est égal à 1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} \geq 1$. Donc pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^n$$

   Or $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{1-x} = +\infty$. Donc $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$.

3. La suite $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ tend vers 0 en décroissant. En effet :
   - d'une part, la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}-\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $h'(x) = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \leq 0$ pour tout $x \in]1,+\infty[$. D'où h est décroissante sur $]1,+\infty[$. En particulier $h(n+1) \leq h(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - d'autre part, la limite de $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ est 0 car $\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

   D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ est donc convergente. Par contre la série n'est pas absolument convergente car $\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, qui ne change pas de signe, et la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge d'après le critère de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

   La série $\sum(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n$ converge si $x=-1$ d'où son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1. Elle diverge si $x=+1$ d'où son rayon de convergence est inférieur ou égal à 1. Donc son rayon de convergence est égal à 1.
4. Soit $x \in]-1,1[$. Toutes le séries à suivre convergent, d'où :

$$\begin{aligned}(1-x)g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}x^{n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\sqrt{n-1}x^{n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n-1}x^{n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n\end{aligned}$$

   Première méthode — On utilise le **théorème radial d'Abel**. Le rayon de convergence de la série entière $\sum(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n$ est 1 et la série numérique $\sum(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n$ converge. Donc, d'après le théorème radial d'Abel,

$$(1-x)g(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n.$$

   Donc $g(x) = \dfrac{1}{1-x}\cdot(1-x)g(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\cdot\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n$.

   Seconde méthode — On utilise les **théorèmes des séries alternées et de la double limite**. Soit $x \in]-1,0]$: on peut appliquer le théorème des séries alternées à la série numérique $\sum(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n$. Cette série converge et son reste $R_n(x)$ vérifie :

$$|R_n(x)| \leq (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})|x|^{n+1} \leq \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

   qui est un majorant. Or le *sup* est le plus petit majorant, d'où $0 \leq \sup\limits_{x\in]-1,0]}|R_n(x)| \leq \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. Or $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   D'où $\sup_{x\in]-1,0]}|R_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où la suite des fonctions (R_n) converge uniformément sur $]-1,0]$ vers la fonction nulle.
   De plus $(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n \underset{x\to -1}{\longrightarrow} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n$ qui est une limite finie, donc on peut intervertir somme et limite :

$$\lim_{x\to -1^+}(1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n.$$

   Donc $g(x) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(-1)^n$.