Corrigé de la feuille de T.D. n° 09

Séries entières

18 janvier 2025

Exercice 1. Il y a une boule blanche dans une urne. On joue indéfiniment à pile ou face avec une pièce. Quand la pièce tombe sur face, on ajoute une boule noire dans l'urne. Quand elle tombe sur pile, on tire une boule au hasard de l'urne et le jeu est fini.

1. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « la pièce tombe sur *Pile* la première fois au $n-$ième lancer ». Montrer que ces événements forment un système quasi complet d'événements.
2. Quelle est la probabilité de tirer un jour une boule blanche ?

---

1. Les événements A_n forment un système quasi complet d'événements car leur union est :
   - disjointe car la pièce ne peut tomber la première fois sur *Pile* à deux lancers différents ;
   - presque certaine car chaque évenement A_i est égal à $F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap \bar{F}_n$, en notant F_k l'événement « la pièce tombe sur *Face* au $k-$ième lancer ». Or les événements F_k sont indépendants et de probabilité $\frac{1}{2}$, d'où $P(A_n) = \frac{1}{2^n}$ et $P\left(\cup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ par $\sigma-$additivité. Enfin $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$.
2. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales : la probabilité de l'événement B : « tirer une boule blanche » est
$$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$
Or $P(A_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $P(B|A_n) = \frac{1}{n}$ car, si A_n se réalise, alors il y a $n-1$ boules noires et 1 boule blanche dans la boîte et chaque boule a autant de chance d'être tirée que les autres. Donc $P(B) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour chaque $x \in]-1,+1[$. Or $\frac{1}{2} \in]-1,+1[$, donc $P(B) = -\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ dans les cas suivants :

1. $a_n = \sin n$
2. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$
3. $a_n = \sqrt{n}$
4. $a_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)$
5. $a_n = n!$
6. $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!n^n}$

Exercice 3. Soient les deux séries entières
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

1. Calculer le rayon de convergence de ces deux séries et, quand elles convergent, calculer leur somme.

2. Calculer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$$

et montrer que, pour tout $x \in]-R,+R[$, sa somme vaut

$$S(x) = \frac{1-x}{2}\ln(1-x) - \frac{1+x}{2}\ln(1+x) + x.$$

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n(2n+1)}$ converge et calculer sa somme.

---

1. La série entière $\sum x^{2n-1}$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,+1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{x}{1-x^2}$.

   On peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc : la série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2n}$ a aussi pour rayon de convergence 1 et

$$\forall x \in]-1,+1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = -\ln(\sqrt{1-x^2}).$$

   La série entière $\sum x^{2n}$ a pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,+1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. On peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc : la série entière $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ a aussi pour rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,+1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt = -\ln(\sqrt{1-x}) + \ln(\sqrt{1+x}).$$

2. La série entière $\sum \frac{x^{2n}}{2n}$ a pour rayon de convergence 1. On peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc : la série entière $\sum \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ a aussi pour rayon de convergence 1 et, pour tout x appartenant à $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} &= \int_0^x -\ln(\sqrt{1-t^2})dt \\
&= -\int_0^x \ln(\sqrt{1-t})\,dt - \int_0^x \ln(\sqrt{1+t})\,dt \\
&= \frac{(1-x)}{2}\ln(1-x) - \frac{x+1}{2}\ln(1+x) + x.
\end{aligned}$$

   Autre méthode : $\displaystyle\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$, d'où, pour tout x appartenant à $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x \\
&= \frac{(1-x)}{2}\ln(1-x) - \frac{x+1}{2}\ln(1+x) + x
\end{aligned}$$

   d'après la question 1.

3. La série $\sum \frac{1}{2n(2n+1)}$ est convergente car $\frac{1}{2n(2n+1)} \sim \frac{1}{4}\frac{1}{n^2}$ qui ne change pas de signe, or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après la critère de Riemann. Donc, d'après le théorème d'Abel radial,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 1 - \ln 2$$

   car $(1-x)\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

   Autre méthode — Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,+1]$, $f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$.

Pour tout $x \in [-1,+1]$, $\left|\frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}\right| \leq \frac{1}{2n(2n+1)}$ et la série $\sum \frac{1}{2n(2n+1)}$ converge. D'où la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[-1,+1]$.
Première rédaction : chaque fonction f_n est continue et la convergence uniforme préserve la continuité, donc la fonction S est continue sur $[-1,+1]$, d'où $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$. Or $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = 1 - \ln 2$ et $S(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 1 - \ln 2.$$

Deuxième rédaction : chaque fonction f_n a une limite finie en 1^- car $\lim\limits_{1^-} f_n = \frac{1}{2n(2n+1)}$. La convergence est uniforme, d'où (théorème de la double limite) : $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$. Or $\lim\limits_{x\to 1^-} S(x) = 1 - \ln 2$. Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 1 - \ln 2.$$

Exercice 4. Soient une suite de réels a_n et la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

On suppose que : $a_n > 0$, S_n diverge et $\frac{a_n}{S_n}$ tend vers 0.

Montrer que les rayons de convergence des deux séries entières $\sum S_n x^n$ et $\sum a_n x^n$ sont égaux à 1.

On note R_a le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et R_s le rayon de convergence de $\sum S_n x^n$. Puisque $S_n > a_n$, $R_s \leq R_a$. De plus, puisque (S_n) diverge, R_a est inférieur ou égal à 1.

On remarque maintenant que $\frac{S_{n-1}}{S_n} = 1 - \frac{a_n}{S_n}$. Or par hypothèse la suite $\left(\frac{a_n}{S_n}\right)$ tend vers 0. Donc la suite $\left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)$ tend vers 1. Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum S_n x^n$ est donc égal à 1. Finalement,

$$1 = R_s = R_a.$$

Exercice 5. Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0.$$

Montrer qu'elles sont définies sur $]-\infty,+\infty[$ et, en utilisant des fonctions usuelles, les exprimer en fonction de x pour tout x positif et pour tout x négatif.

Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-R,R[$. Alors

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

pour tout $x \in]-R,R[$ car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. La fonction f est une solution de l'équation différentielle sur $]-R,R[$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-R,+R[,\ 4xf''(x) + 2f'(x) - f(x) = 0 \quad &\iff \quad \forall x \in]-R,+R[,\ 4x\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \quad \forall x \in]-R,+R[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} 4a_{n+1}n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_{n+1}(n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \quad \forall x \in]-R,+R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} (4a_{n+1}n(n+1) + 2a_{n+1}(n+1) - a_n)x^n = 0 \\
&\iff \quad \forall x \in]-R,+R[,\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1}(4n+2)(n+1) - a_n)x^n = 0 \\
&\iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1}(4n+2)(n+1) - a_n = 0 \quad \text{par unicité du } D.S.E. \\
&\iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{2(2n+1)(n+1)} \\
&\iff \quad \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{(2n)!} a_0
\end{aligned}$$

Grâce au critère de d'Alembert, on trouve que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{(2n)!}x^n$ est $+\infty$. En effet, si $x \neq 0$, alors $u_n = \left|\frac{1}{(2n)!}x^n\right| > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$.

Une fonction f est donc une solution développable en série entière sur $]-\infty;+\infty[$ si, et seulement si, il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]-\infty;+\infty[, \quad f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^n.$$

On reconnaît $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^n = \begin{cases} \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Exercice 6. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est 1.

2. ▷ **théorème 14 du chapitre VII.** Soit, pour tout $x \in]-1,+1[$, $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que

$$f(x) = \frac{\ln(2)}{1+x} - \frac{\ln(1-x)}{1+x}.$$

---

1. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{t^n}{2} \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$, d'où $\frac{1}{2n+2} \leq |a_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Or la série entière $\sum \frac{1}{n+1}x^n$ a pour rayon de *cv* 1, d'où $R \geq 1$. Et la série entière $\sum \frac{1}{2n+2}x^n$ a pour rayon de *cv* 1, d'où $R \leq 1$. Donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = 1$.

2. Soit $x \in]-1,1[$. On veut montrer que $f(x)$, défini par $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{(tx)^n}{1+t}\,dt\right)$, est égal à $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{1+t}\right) dt$.

   Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \,:\, [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f_n(t) = \frac{(tx)^n}{1+t}$.

   $$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| \leq u_n,\ \text{avec } u_n = |x|^n \\ \text{la série } \sum u_n \text{ converge car c'est une série géométrique de raison } 0 \leq |x| < 1 \end{cases}.$$

   Doù la série de fonctions converge normalement (donc unifomément) sur le segment $[0,1]$, en outre chaque fonction f_n est continue, donc on peut intervertir $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\displaystyle\int_0^1$:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{1+t} = \frac{1}{(1+t)(1-xt)} = \frac{1}{(1+x)(1+t)} + \frac{x}{(1+x)(1-xt)}.$$

   Donc, pour tout $x \in]-1,+1[$,

   $$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+t)}\,dt + \int_0^1 \frac{x}{(1+x)(1-xt)}\,dt \\ &= \frac{\ln(2)}{1+x} - \frac{\ln(1-x)}{1+x}. \end{aligned}$$

Exercice 7 (produit de Cauchy)**.** Développer en série entière $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ et en déduire que, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p} = 4^n.$$

---

1. Pour tout $x \in]-1,+1[$, $(1+x)^\alpha$ est égal à
$$\forall x \in]-1,+1|, \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n.$$
On obtient dans le cas où $\alpha = -\frac{1}{2}$:
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-3)\dots(-2n+1)}{n!2^n}x^n.$$
D'où
$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1/4,+1/4|, \quad \tfrac{1}{\sqrt{1-4x}} &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-3)\dots(-2n+1)}{n!2^n}(-4x)^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(3)\dots(2n-1)2^n}{n!}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!2^n}{2^n n!n!}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}x^n
\end{aligned}$$
2. Pour tout $x \in]-1/4,1/4[$, on a l'égalité :
$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n &= \tfrac{1}{1-4x} \\
&= \left(\tfrac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}x^n\right)^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p}\right)x^n
\end{aligned}$$
grâce au produit de Cauchy des deux séries entières.
Par unicité du développement en série entière,
$$4^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2p}{p}\binom{2(n-p)}{n-p}.$$

Exercice 8 (produit de Cauchy & équation différentielle)**.**

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,+1[$.
2. Former une équation différentielle vérifiée par la fonction f sur $]-1,+1[$.
3. En déduire les coefficients du développement en série entière de f.

---

1. Pour tout $x \in]-1;+1[$, $-x^2 \in]-1;+1[$, d'où la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $]-1,+1[$. De plus, on peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc la fonction arcsin est développable en série entière sur $]-1,+1[$. Par produit de Cauchy, leur produit l'est aussi, sur $]-1;+1[$ au moins.
2. Pour tout $x \in]-1,+1[$, $(1-x^2)f'(x) = 1+xf(x)$.
3. Pour tout $x \in]-1,+1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ d'après la question 1. On peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où : $\forall x \in]-1,+1[,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

D'après la question 2, pour tout $x \in]-1,+1[$, $(1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Or $\begin{cases} (1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n \\ 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n \end{cases}$.

Par unicité du développement en série entière, $\begin{cases} a_1 = 1 \\ 2a_2 = a_0 \\ \forall n \geq 2,\ (n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} = a_{n-1} \end{cases}$.

De plus, $a_0 = f(0) = \dfrac{\arcsin(0)}{\sqrt{1-0^2}} = 0$.
D'où $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+n)a_n = (n+2)a_{n+2}$.

Donc $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \dfrac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}.}$

Remarque : la fonction f étant impaire, on savait avant calcul que tous les coefficients d'indice pair étaient nuls.

Exercice 9. Soit un réel α. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}$ est infini et calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\frac{\sin(n\alpha)}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$ et le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$. Celui de la série entière $\sum \frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}$ lui est supérieur, donc aussi infini.

Soit $x \in \mathbb{R}$: le réel $\frac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}$ est la partie imaginaire du complexe $\frac{x^n e^{in\alpha}}{n!} = \frac{(xe^{i\alpha})^n}{n!}$.

D'où le réel $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n \sin(n\alpha)}{n!}$ est la partie imaginaire du complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xe^{i\alpha})^n}{n!} = \exp\left(xe^{i\alpha}\right) = \exp\left(x\cos\alpha + ix\sin\alpha\right) = e^{x\cos\alpha} \cdot e^{ix\sin\alpha} = e^{x\cos\alpha} \cdot \left[\cos(x\sin\alpha) + i\sin(x\sin\alpha)\right].$$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n \sin(n\alpha)}{n!} = e^{x\cos\alpha} \cdot \sin(x\sin\alpha)$ pour tout réel x.

Exercice 10 (extrait de Centrale-Supelec 2024 PC Math 2)**.**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,
$$|(1+t) - e^t| \leqslant |t|^2 e^{|t|}$$
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|,|b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leqslant \dfrac{|z|^2}{n} e^{|z|}$.
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.

---

1. Soit $t \in \mathbb{C}$, par développement en série entière de l'exponentielle puis inégalité triangulaire puis $k! \geq (k-2)!$,

$$|(1+t) - e^t| = \left| -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!} \leq |t|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 e^{|t|}$$

2. Par l'inégalité triangulaire,

$$|a^n - b^n| = \left| (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right| \leq |a-b| \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|a^k|}_{\leq M^k} \underbrace{|b|^{n-1-k}}_{M^{n-1-k}} \leq n M^{n-1} |a-b|$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M = \max\left\{ \left|1 + \frac{z}{n}\right|, \left|e^{\frac{z}{n}}\right| \right\}$. D'après les questions précédentes,

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z \right| = \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n \right| \leq n M^{n-1} \left| 1 + \frac{z}{n} - e^{\frac{z}{n}} \right| \leq n M^{n-1} \left| \frac{z}{n} \right|^2 e^{\frac{|z|}{n}}$$

De plus, $\left|1 + \frac{z}{n}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq e^{\frac{|z|}{n}}$ et $|e^{\frac{z}{n}}| \leq e^{\frac{|z|}{n}}$ (obtenu par inégalité triangulaire et DSE de exp) donc

$$M \leq e^{\frac{|z|}{n}}$$

et, par conséquent,

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z \right| \leq n M^{n-1} \left| \frac{z}{n} \right|^2 e^{\frac{|z|}{n}} \leq \frac{|z|^2}{n} e^{\frac{(n-1)|z|}{n}} e^{\frac{|z|}{n}} = \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$$

4.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |u_n - e^z| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{|z|^2}{n} e^{|z|} = 0$$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to \infty} |u_n - e^z| = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n \to \infty} u_n = e^z$$

Exercice 11. Soient (a_n) une suite de complexes et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$.
2. Montrer que, pour tout réel β, la série entière $\sum n^\beta a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.

On ne peut pas utiliser le critère de D'Alembert car l'hypothèse de l'exercice est la conclusion du critère. On va utiliser la caractérisation suivante du rayon de convergence, qui est aussi sa définition : $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } a_n r^n \text{ est bornée}\}$ ▷ **remarque 5 du chapitre IX**.

1. Soit $r > R^2$: la suite des complexes $a_n^2 r^n$ n'est pas bornée car la suite des réels $|a_n|^2 r^n = \left(|a_n| \sqrt{r}^{\,n}\right)^2$ n'est pas bornée. D'où le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$ est inférieur ou égal à R^2.

   Soit $r < R^2$: la suite des complexes $a_n^2 r^n$ est bornée car la suite des réels $|a_n|^2 r^n = \left(|a_n| \sqrt{r}^{\,n}\right)^2$ est bornée. D'où le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^2 z^n$ est supérieur ou égal à R^2. Donc il est égal à R^2.
2. Première méthode — Si β est un entier, alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\beta a_n z^n$ ont le même rayon de convergence ar on peut driver ou intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. Si β n'est entier, alors $|n^{\lfloor \beta \rfloor} a_n z^n| \leq |n^\beta a_n z^n| \leq |n^{\lfloor \beta \rfloor + 1} a_n z^n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et ces séries entières ont donc le mêm rayon de convergence.
   Seconde méthode — Soit $r > R$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $r - \epsilon > R$. Donc la suite $(|a_n|(r-\epsilon)^n)$ n'est pas bornée. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n^\beta |a_n| r^n = \left(n^\beta \frac{r^n}{(r-\epsilon)^n} \right) |a_n| (r-\epsilon)^n.$$

   D'où la suite $(n^\beta |a_n| r^n)$ n'est pas bornée. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\beta a_n z^n$ est inférieur ou égal à R.
   Soit $r < R$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $r + \epsilon < R$. Donc la suite $(|a_n|(r+\epsilon)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n^\beta |a_n| r^n = \left(n^\beta \frac{r^n}{(r+\epsilon)^r} \right) |a_n| (r+\epsilon)^n.$$

   Donc la suite $(n^\alpha |a_n| r^n)$ est bornée. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\beta a_n z^n$ est supérieur ou égal à R. Donc il est égal à R.

Exercice 12. Soient $R_a > 0$ et $R_b > 0$ les rayons de convergence de deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. La série entière $\sum (a_n b_n) x^n$ est appelée le **produit de Hadamard** de ces deux séries entières. Soit R son rayon de convergence.

1. Soit r un réel tel que $0 < r < R_a \cdot R_b$. Justifier qu'il existe $r_a > 0$ et $r_b > 0$ tels que

$$r_a < R_a \quad , \quad r_b < R_b \quad \text{et} \quad r_a \cdot r_b = r.$$

2. Montrer que $R \geq R_a \cdot R_b$.
3. Calculer le produit de Hadamard des séries entières $\sum x^n$ et $\sum a_n x^n$. Et des séries entières $\sum x^{2n}$ et $\sum x^{2n+1}$. Qu'en déduire ?

---

1. Soit $k = \frac{R_a R_b}{r}$. Alors $k > 1$, d'où $r_a = \frac{R_a}{\sqrt{k}}$ et $r_b = \frac{R_b}{\sqrt{k}}$ sont strictement inférieurs à R_a et R_b respectivement. Et $r_a r_b = r$.
2. On va utiliser la caractérisation suivante du rayon de convergence, qui est aussi sa définition :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } a_n r^n \text{ est bornée}\}$$ ▷ **remarque 5 du chapitre IX**.

   Soit $0 < r < R_a \cdot R_b$. On peut choisir r_a et r_b comme dans la question précédente : les suites $a_n r_a^n$ et $b_n r_b^n$ sont alors bornées. La suite $(a_n b_n) r^n = (a_n r_a^n)(b_n r_b^n)$ est donc aussi bornée. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n b_n x^n$ est donc supérieur ou égal à $R_a \cdot R_b$.
3. Le produit de Hadamard $\star$ des deux séries entières $\sum x^n$ et $\sum a_n x^n$ est la série entière $\sum a_n x^n$. La série entière $\sum x^n$ est donc un élément neutre de la loi $\star$. Et on peut vérifier que, muni des lois $+$ et $\star$, l'ensemble des séries entières est un anneau commutatif. Cet anneau n'est pas intègre car le produit de Hadamard des séries entières $\sum x^{2n}$ et $\sum x^{2n+1}$ est la série entière nulle $\sum 0 x^n$.

   Par ailleurs, le premier produit montre que l'inégalité $R \geq R_a R_b$ peut être une égalité et le second produit montre que l'inégalité peut être stricte.