Colle n° 15

Variables aléatoires

Exercice 1. Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce de monnaie qui tombe sur *pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient *pile* gagne le jeu. C'est A qui commence à jouer.

1. Quelle est la probabilité que A gagne ? Quelle est la probabilité que B gagne ? L'un des deux joueurs a-t-il plus de chances de gagner que l'autre ?
2. Calculer (de deux manières ?) la probabilité que le jeu ne s'arrête pas. Au quantième lancer peut-on espérer avoir un gagnant ?

Exercice 2. Ils sont n joueurs ($n > 2$) à jouer une partie à pile ou face en jetant chacun une pièce. L'un d'entre eux gagne la partie si sa pièce donne un résultat différent des $n-1$ autres. On joue jusqu'à ce qu'apparaisse le premier gagnant ; soit X le nombre de parties alors jouées. Calculer, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(X = k)$. Étudier l'espérance et la variance de X.

Exercice 3 (Oral Mines Ponts PSI 2016)**.** Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2a$ boules blanches et a boules noires indiscernables. On effectue une suite de tirages, avec remise, d'une boule de l'urne. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués lorsqu'on obtient pour la première fois deux boules noires lors de deux tirages consécutifs.

1. Montrer que la suite $(P(X \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait une relation de récurrence d'ordre 2.
   En déduire la loi de X.
2. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.